

**RIPENSANDO IL PENSIERO PROPORZIONALE:
SCHEMI PER LA RIFLESSIONE E PER LA PROGETTAZIONE DIDATTICA
proposti nel corso di “Didattica della Matematica” della laurea in “Formazione Primaria”**

PREMESSA

- In questo paragrafo iniziale vengono riportati schematicamente alcuni *spunti di riflessione* che si riferiscono più generalmente alla situazione della scuola di base, al ruolo che vi giocano gli insegnanti, ai “compiti” istituzionali che una laurea in “formazione primaria” dovrebbe/potrebbe assolvere. Tali spunti si affiancano (e talvolta si sovrappongono) a diversi argomenti già discussi nell’Introduzione: d’altra parte sono riportati qui in quanto una loro rielaborazione personale da parte degli studenti costituisce *parte integrante del “contratto didattico” del corso di Didattica della Matematica* (“contratto” esplicitato all’inizio e chiarito/discusso in itinere). In questo modo sono messi in evidenza anche alcuni degli obiettivi che si trovano a monte delle scelte fatte sia nel corso, sia nel predisporre queste note.

- Quanto riportato per scritto in forma di appunti-promemoria è sempre (anche deliberatamente) molto schematico. Perciò si rivolge in primo luogo a chi segue o ha seguito il corso a cui si fa riferimento, e quindi ha presenti i suoi esempi, esercizi e discussioni; oppure a chi, già “esperto”, voglia trovare suggerimenti per sviluppare e articolare una propria proposta di percorso didattico con i ragazzi. (Molti suggerimenti possono valere a livello non solo primario, ma per certi aspetti anche secondario, e comunque di formazione di insegnanti: ovviamente a “Didattica della Matematica” non si parla di derivate o integrali!). L’esperienza mostra infatti che un possibile ruolo dinamicamente costruttivo di schemi di riflessione di questo tipo è quello di strumento/supporto di organizzazione, apriori in itinere e aposteriori, che comunque aiuta (impone) un coinvolgimento cognitivo personale. A qualunque livello, l’obiettivo di una riflessione-su (al di là di una competenza-esecutiva-in) è infatti il *controllo delle varietà/invarianze “astratte” di un dato contesto cognitivo, viste e analizzate attraverso le correlazioni attraverso cui in qualche modo “traspaiono”*. E un tale controllo, a cui anche questi schemi vorrebbero aiutare ad indirizzare, è *sempre necessario per gestire tutte le situazioni “concrete”* a cui ci si deve/vuole comunque riferire pensando ad una reale comprensione, e ad una adeguata motivazione alla comprensione.

- D’altra parte, con questi schemi si intende in primo luogo contribuire ad affrontare in modo esemplificativo un comune disagio (una situazione vissuta come antinomica) in relazione al “sapere matematico” trasmesso ad ogni livello scolastico. Da un lato si acquisiscono infatti (quando va bene) competenze tecniche, da usare in modalità standard e univoche in contesti standard pre-definiti da altri; dall’altro ci si trova (troppo spesso) “scoperti” di fronte alla eventualità/necessità di utilizzare (letteralmente: rendere-utile) lo stesso “sapere” in situazioni anche semplici, ma non pre-disposte dall’esterno in vista dell’evocazione, dell’attivazione e dell’esercizio del pensiero matematico. Questa *antinomia (forse sintetizzabile in un sapere-senza-capire)* costituisce a sua volta la radice sia di molti dei crolli di motivazione evidenti nei ragazzi; sia del comune sentire nei confronti della matematica (spesso anche da parte di chi la insegna), e delle frustrazioni che ne seguono; sia delle correlate, esplicite difficoltà di mediazione didattica efficace incontrate da parte degli stessi insegnanti, tutte le volte che non riescono a rompere il loop di significato che spesso li blocca in una sostanziale non-comunicazione con i loro allievi.

- L’inchiesta PISA (1) ha recentemente documentato che oggi in Italia siamo al 26° posto per le competenze matematiche di base rilevate a 15 anni. La situazione è aggravata dal fatto che i nostri dati si riferiscono a poco più del 60% della leva di età, mentre per i Paesi europei plausibilmente “di

riferimento” tale percentuale è dell’80/90%. Il risultato (medio, e riferibile ovviamente all’integrale di tutto il percorso scolastico fino a quell’età) può dipendere ovviamente solo dai modi (in senso lato) in cui di fatto si insegna, e si insegna a insegnare: il cambiamento possibile, anche. Purché si riconosca che il problema esiste ed è enorme; purché si esca da un ottimismo di facciata, e ci si metta con onestà intellettuale a *cercare una risonanza gestibile fra le necessità socioculturali, le potenzialità di comprensione e di motivazione dei ragazzi, le competenze mediazione cognitiva degli adulti*. (Né le une né le altre molto diverse da quelle attive in tanti altri Paesi “sviluppati”). Comunque dovrebbe essere condiviso da tutti (coinvolgendo la propria esperienza personale) che *oggi cambiare come vanno le cose a scuola è necessario, e urgente*: e costituisce un preciso sfondo di motivazione del modo stesso in cui è organizzato il corso di Didattica della Matematica la consapevolezza che *si tratta, in primo luogo, di risalire da una situazione di sostanziale handicap culturale – spesso acutamente individuale, certo diffusamente sociale*. Al di là del contenuto delle singole proposte, questa consapevolezza implica quindi un approccio ben chiaro nell’affrontare ogni problema didattico, sia come insegnante (attuale o futuro) che come ricercatore o docente; mentre un presupposto per l’efficacia di quello che si propone è costituito dalla sua capacità di presa sulle persone, sia immediata (nel corso), sia futura (nella didattica in classe, come nel cercare e ottenere un supporto sociale diffuso all’impresa di “recupero culturale”).

- D’altra parte PISA, scegliendo una *<mathematical literacy>* come obiettivo dei suoi test, la caratterizza come *<individual capacity to identify and to understand the role of mathematical knowledge as put into functional use in a multitude of situations and contexts>*. Sembra una definizione condivisibile degli scopi di una didattica di base, pur nella sua deliberata generalità: in quanto tale ripresa anche nel manifesto dell’ “ICMI Study 14 - Applications and modelling in Mathematical Education” (2) (l’argomento è particolarmente pertinente agli obiettivi di questi schemi). Se mai è preoccupante che proprio nella lunga presentazione dell’ICMI Study, centrata intorno a molte e diverse articolazioni delle nozioni di *<teaching and learning>*, il preciso significato e lo specifico problema del “capire” (quindi, dello “spiegare”) non trovino in pratica né evocazione né posto né ruolo adeguati. Anche nella ricerca non tutto, forse, è così chiaro su cos’è che non va: la discriminazione fra capire e imparare, ambedue essenziali alla trasmissione culturale ma con contributi e coinvolgimenti ben diversi, dovrebbe essere elaborata a monte e all’interno di ogni (futura) proposta didattica che voglia essere efficace e significativa.

- E’ ormai ben assodato a livello di ricerca che capire *esige percorsi cognitivi lunghi, variati*, efficacemente indirizzati e controllati nella loro dinamica; che capire *non è il risultato di una sequenza* lineale (3) di apprendimenti (o di cambiamenti concettuali) distribuiti in passi, gradi o stadi, ma di progressive coagulazioni complesse - che coinvolgono risonanze profonde fra cognitività sensorietà e cooperazione dal lato del soggetto, fisicità cultura e progetto da quello del suo ambiente; che capire *coinvolge sempre trasversalmente “saperi” diversi* (p.es. competenza linguistica, fisica, di rappresentazione simbolica in intreccio con la matematica, di percezione selettiva e azione finalizzata ...); e che perciò capire *si sviluppa sempre lungo percorsi intrecciati*, con ingredienti culturali differenziati interferenti a più livelli. In cui per esempio si può ben saper ragionare in maniera prototipicamente proporzionale anche senza saper fare bene le divisioni, ma si può anche non saper vedere/interpretare/usare la proporzionalità pur applicandone correttamente il formalismo “su ordinazione”; e così via sul piano generale, e su molti aspetti particolari. Ma perché allora del sapere-sul-sapere, oggi ben disponibile a livello di ricerca, appare così scarsa traccia nelle proposte curriculari, e di formazione di insegnanti, elaborate dalle “autorità competenti” (accademiche e scolastiche)? Cosa si può fare per diffondere la coscienza della necessità di un cambiamento, di fronte a difficoltà così macroscopicamente evidenti? D’altra parte le riforme dell’insegnamento, e i paralleli sviluppi culturali a livello diffuso di base (a livello del “sapere di tutti”), evolvono proprio se sostenuti da situazioni di sensibilità diffusa: forse si tratta di rendere prima possibile (attraverso la messa in circolo di strumenti di supporto adeguati), e poi di

costruire (attraverso adeguate azioni di supporto all'innovazione), un' "*area di sviluppo prossimale diffuso*" (con parole alla Vigotskij), in particolare nelle scuole, che sia sensibile alla situazione cognitiva dei ragazzi e degli adulti, e che renda così - poco alla volta - il cambiamento culturale praticamente inevitabile. (Forse).

- Naturalmente c'è il solito *loop causale* fra condizioni culturali spesso diffusamente antagoniste, condizioni sociali spesso in sofferenza, condizioni professionali spesso grette e contorte, condizioni organizzative in genere sclerotiche, condizioni economiche chiaramente asfittiche, e via aggiungendo. Ma l'unica via per uscire dal loop è decidere di uscirne, e provare a farlo – lavorando insieme ad altri in coerenza sia di obiettivi che di modi.

- Negli schemi che seguono non viene deliberatamente impiegata una concettualizzazione, e quindi una terminologia, non rigorosa dal punto di vista disciplinare (per cui si rinvia ai testi "canonici" consigliati nei corsi di Fondamenti). In base all'esperienza delle difficoltà più comuni incontrate nella didattica appare infatti più efficace che l'uso di concetti e etichette, non definiti apriori in forma univocamente e correlativamente definita, sia guidato ad emergere con paziente gradualità, negli adulti in formazione come nei bambini in apprendimento: in modo cioè da essere visto come necessaria ed efficiente garanzia aposteriori di progressiva coerenza e flessibilità (quindi in ruolo facilitante la strutturazione, la stabilizzazione e la gestione del sapere), piuttosto che come imposizione apriori non giustificata (quindi in ruolo ostacolante l'accesso al sapere). D'altra parte, dall'esperienza appare altrettanto cruciale che le diverse strategie cognitive di base sottese al pensiero matematico (numerose e differenziate, ma di per sé assai poco specialistiche) vengano riconosciute, evocate, indirizzate e sostenute nel loro sviluppo e nella loro convergenza – senza velleità e forzature, ma senza cecità o rinunce - fin dall'inizio dell'esperienza scolastica (dai tre anni in poi ...): utilizzando, per questo, i più svariati supporti cognitivi (percezione, lingua naturale, motricità, rappresentazione iconica ...), e la ricchezza dei loro intrecci. In questa *duplice* apertura di *interfaccia* – con il pensiero naturale così come è nell'uso adulto e come si trasforma nella persona che cresce, e con il pensiero scientifico strutturato così come può essere via via appropriato – sta la dimensione caratteristica (sempre creatrice di cultura) della "mediazione" didattica umana. (A scuola non servono né meccanicistiche "trasposizioni didattiche" del sapere, né condizionanti conformismi del pensare).

- Gli schemi ritenuti utili per configurare e articolare una padronanza "matura" del pensiero proporzionale, che puntano cioè a una *consapevolezza adulta adatta alle potenzialità cognitive dei ragazzi e a quelle culturali della disciplina*, sono presentati in ordine in nessun modo sequenziale (nel corso stesso diversi degli aspetti toccati qui di seguito emergono ovviamente intrecciati tra loro), né prefigurano una definita sequenza curricolare da articolare a livelli scolastici diversi. Per progettare e gestire accuratamente e efficacemente un simile articolazione, e raccorderla alla dinamica cognitiva di una classe concreta, c'è bisogno di esercitare di continuo la consapevolezza di cui sopra.

- Da ultimo, una nota sulla specificità del tema prescelto per queste note: il *pensiero proporzionale*. Si tratta di un *cluster/intreccio di strategie cognitive* biologicamente e culturalmente fondamentali, in quanto tali ineludibili a qualunque livello scolastico, secondo cui diventiamo gradualmente capaci di guardare/vedere aspetti di realtà secondo determinati modi-di-pensare (in senso lato: modi di percepire, agire, parlare, rappresentare,...); e al tempo stesso capaci di assecondare la strutturazione e la stabilizzazione delle nostre dinamiche mentali e culturali seguendo progettando e controllando lo svolgersi di particolari modi-di-essere del mondo. (Piaget li avrebbe chiamati processi di assimilazione e accomodamento: mancando però di rilevarne una caratteristica dinamicamente cruciale, quella della loro reciproca risonanza attraverso la reciproca "costruzione" di soggetto e oggetto).

Da sempre, il pensiero proporzionale costituisce dunque uno *strumento principe di modellizzazione* (sia delle più disparate fenomenologie naturali, sociali e anche estetiche – ben prima comunque dello sviluppo in serie di Taylor; sia all'interno dello stesso pensiero matematico formalizzato – in un certo senso a partire dalle stesse strutture della logica e dell'analisi). In qualche modo, perciò, il pensiero proporzionale appare particolarmente adatto come supporto di progressivo sviluppo (a partire dalla scuola dell'infanzia!...) di una essenziale *competenza metacognitiva*: quella *che correla i tre nodi di ogni pensare, la struttura da mettere in forma, la struttura secondo cui mettere in forma, la struttura dell'attività che mette-in-forma*.

Tre rapide riflessioni a questo proposito: i) E' diffuso il vezzo di intendere per "modellizzazione" soltanto un percorso (sostanzialmente guidato) secondo cui a partire da alcune caratteristiche di correlazione rilevate in un referente dato se ne "inducono" relazioni formali, viste come soddisfacentemente "rappresentative" del referente stesso; per non parlare della malabitudine di presentare spesso come univoco dato-di-fatto una certa corrispondenza apriori fra una data fenomenologia (in senso lato) e una sua formalizzazione definita. E' invece altrettanto importante abituare le persone a dis-articolare analiticamente i vari ingredienti che intervengono a costruire una data "forma" (formula...), una volta acquisita come tale in un qualunque modo, per analizzarne le potenzialità di modellizzazione (in modo scherzoso chiamiamo con gli studenti questo processo "de-modellizzare"...) in termini p.es. di relazioni implicate nella sua struttura algebrica; e così via. ii) Una volta costruito un modello, le sue caratteristiche "formali" non ne costituiscono propriamente il "linguaggio rappresentativo": piuttosto concorrono a definire la struttura, e quindi la "natura" stessa del referente modellizzato, di solito specificandone più o meno direttamente le componenti sia spaziotemporali che causali (nel secondo caso, di solito attraverso metaforizzazione spaziale delle diverse relazioni di inter-azione). In un certo senso, didatticamente cruciale anche se epistemologicamente discusso ab aeterno, la matematica non "incarta" i fatti, ma è una componente essenziale della loro "realtà". iii) Modellizzazione e demodellizzazione sono le due facce inseparabili di un'unica dinamica di reciproco aggiustamento risonante fra modi di pensare e modi di essere (cfr sopra): la mediazione didattica dovrebbe puntare ad esplicitare questa consapevolezza, chiave essenziale di vera "competenza".

(1) PROPORZIONALITA': UN MODO DI GUARDARE

Prima, e più in generale, che una struttura numerica la "proporzione" è una struttura di dinamica concettuale (un "modo di pensare"), radicata nelle strategie cognitive più generali (a cominciare da quelle percettive) e attiva fino a quelle più astratte e sofisticate. Al tempo stesso, e proprio in relazione a questo, si tratta di una struttura formale aggiustabile ad un'infinità di casi di dinamica fattuale (ad un'infinità di "modi di andare del mondo"), che è possibile individuare e controllare nei fatti esterni fin dai processi più semplici di pensiero, in modo sostanzialmente ed esemplarmente "risonante". Si tratta, in definitiva, della sintesi di due relazioni dello stesso tipo (non "additivo", in genere; ma non è detto che si tratti, sempre in generale, di un rapporto numericamente esplicitato). Le due relazioni legano quattro termini presi due a due, rispetto a cui si afferma una "equivalenza relazionale", riconosciuta valida attraverso un duplice confronto condotto con lo stesso criterio: fino a un contemporaneo confronto fra confronti, di tipo logico in genere diverso, che stabilisce appunto il risultato di equi-valenza. I quattro termini per essere così valutati devono trovarsi ("stare", essere "guardabili") come contemporaneamente giustapposti all'interno di una complessiva "centratura di attenzione", che mette in relazione sintetica i due diversi contesti di riferimento: e di questo "stare" resta chiara traccia nella lingua (in ogni lingua naturale) attraverso cui la "proporzione" stessa si presenta e si rappresenta.

Ci sono (sono stati riconosciuti fin dall'antichità) diversi "livelli" concettuali e formali attraverso cui questa dinamica cognitiva si esplicita, "funziona", e nel suo stesso funzionare (indotto e guidato dall'interazione pensiero-fatti-cultura) si costruisce si differenzia e si articola. Alcuni esempi sono dati qui di seguito, a solo scopo evocativo: il lettore dovrebbe trovarne (molti) altri per conto proprio prima di procedere.

Un punto cruciale è che tali "livelli" sono spesso interpretati (anche secondo l'ottica bloccante di un piagetismo miope e cognitivamente funesto) come altrettanti "gradini" di sviluppo lineale: come se "arrivare a" ragionare proporzionalmente eseguendo rapporti fra numeri costituisse una prestazione cognitiva non solo più "formale" di altre, caratteristiche di altre modalità rappresentative, ma soprattutto destinata a sussumerle e soppiantarle. Niente di più falso, e soprattutto di più distorcente l'azione didattica. I "livelli" secondo cui si pensa, si agisce, si parla, si simbolizza ... in modo proporzionale sono in realtà modalità parallele (a volte alternative, sempre interferenti) di esplicitazione del ragionamento: che hanno sia *attivazione potenzialmente parallela* a seconda del potere evocativo e della operatività implicita dei diversi contesti, in qualunque fase dello sviluppo cognitivo; sia *sviluppo potenzialmente parallelo* (spesso temporalmente ed esperienzialmente sfalsato) nel loro passaggio da pure potenzialità emergenti nel pensiero, ad "aree di sviluppo prossimale", ad acquisizioni esplicite, a strategie in-corporate e automatizzate alla radice di comportamenti cognitivi sempre più complessi e articolati, fino a strutture di formalizzazione le più diverse.

Primo esempio

- (a) *I patrizi stanno ai plebei come la testa sta ai piedi (i plebei stanno ai patrizi...)*
- (b) *I patrizi stanno alla testa come i plebei stanno ai piedi (la testa sta ai patrizi...)*
- (c) *(Considerando patrizi-e-piedi da un lato, plebei-e-testa dall'altro, sembra di vedere una specie di "compensazione simmetrica" nelle coppie di termini...)*

Tutte le metafore e le analogie (c'è una letteratura praticamente sterminata sull'argomento), in particolare, possono essere discusse secondo una stessa linea cognitiva:

- si considerano due "realtà sistemiche" (internamente più o meno strutturate) più o meno note;
- *all'interno di ciascuna* di esse si isola una coppia di elementi che, sulla base di un meta-criterio globale, sono riconosciuti come *legati da una "stessa" relazione* (cioè, si individua una "relazione trasferibile": notare che proprio a questo livello si compie il passo di astrazione cruciale, legato direttamente alla dinamica cognitiva individuale e alla suggestione culturale);
- si enuncia tale cor-relazione in un doppio possibile formato, visto come equivalente nella sostanza attraverso la differenza di forma: di "*proporzione dis-omogenea*" e "*interna*" (a), quando ciascuna delle coppie (i cui termini sono non-equivalenti in significato) è guardata-vista all'interno dello stesso sistema, mantenendo invariata la scelta di relazione nell'altra coppia; "*omogenea*" e "*esterna*" (b) nell'altro caso, in cui le coppie di termini sono abbinate rispettando il significato (omogeneo) che a ciascuna è assegnato all'interno di ciascuno dei rispettivi sistemi.

(Ci sono – e vanno riconosciute - innumerevoli varietà e particolarizzazioni della struttura, a cominciare dal pensiero/linguaggio naturale).

Una sorta di "compensazione" (c) è in qualche modo rilevabile considerando in abbinamento le coppie di termini "doppiamente incrociati" (*relazione esterna e disomogenea*): se a questo livello puramente linguistico quasi mai si va oltre il gioco cognitivo, la "mossa strutturante" è tuttavia significativa sul piano strategico. (Cfr più avanti le considerazioni sulla *meta-strategia cognitiva di compensazione*).

Secondo esempio

<Lui è più grande, è giusto che porti più peso ... che mangi di più ...>
 <E' troppo poco per tutta la fame che ho...>
 <Per tutto quello che ha combinato, non è giusto che abbia un castigo così da poco...>
 <Queste sono le mutande giuste per la mia barbie...questa è la dose giusta per il mio bambino...>
 <...costruiamo le sedie e i piatti e i letti giusti per i tre orsi nella favola di ricciolidoro...>
 <Non è giusto che a noi che siamo così tanti ce ne dai tante quante a loro che sono molto meno...>

Attraverso le infinite varietà del “giusto-per” la proporzione si fa (semi-)quantitativa: si isolano e si confrontano variabili, per lo più diverse, che il più spesso sono continue ma inizialmente intervengono senza problemi di misura esplicita. Notare che in situazioni di questo tipo, e in infinite altre presenti nel pensiero-linguaggio naturale, la struttura “quaternaria” del pensiero proporzionale appare molte volte come cortocircuitata (contratta, nei suoi termini e/o relazioni) fino a rimanere quasi come struttura attiva al di sotto della superficie del discorso (anche mentale) esplicito. In altre parole, si stabilisce/introietta implicitamente un “giusto assoluto”, in forma di relazione-prototipo che la percezione (o la sua metaforizzazione) è in grado di gestire in modo più o meno diretto: la relazione che caratterizza una situazione vista come proto-tipica è assunta allora come fissa, non ulteriormente analizzabile (questa dinamica evolverà poco a poco, se accortamente assecondata, nella scelta esplicita e contestualmente strategica dell'unità di misura di volta in volta più “adatta”).

(Notare che ancora a questo livello il pensiero proporzionale, in contesti opportuni e con modalità variate, può accomunare bambini e animali).

Terzo e quarto esempio

Sezione di quattro anni.

C'è un mucchio di caramelle da dividere fra i bambini. <Per fare prima>, si dividono in due mucchi uguali (una di qua e una di là...), uno per i maschi uno per le femmine; poi bambini e bambine se li spartiscono (uno a me uno a te uno a lui...) . Alla fine, i conti non tornano: <metà per i maschi e metà per le femmine ... poi una per ogni bambino ...: abbiamo fatto due volte la cosa giusta, ma alla fine non è venuto giusto!>.

Ora ci sono delle stringhe di liquerizia da distribuire in parti uguali – ce ne è una per ogni tre bambini, e la suddivisione pone un problema percettivo-operativo. Ma se “avanzano” due bambini? ... Ma se le stringhe non sono uguali? ...

I nodi cognitivi che possono rendere problematico il “contare” hanno radici profonde – e talvolta riemergono in modalità inaspettate. La suddivisione iniziale delle caramelle in due mucchi uguali, per esempio, corrisponde a una “mispercezione cognitiva” (rilevabile anche in molti altri contesti) che associa una equi-valenza numerica ad una ripartizione in due classi esaustive, viste a loro volta come “simmetriche” – da cui lo “scivolamento” verso una falsa proporzione. (E guardando bene ci si accorge che la “logica” sottesa ha una forte componente spaziale – “di qua e di là”).

D'altra parte proprio nello stesso momento dello sviluppo individuale numerosità e estensione lineare con-corrono e co-operano nel definirsi reciprocamente, e in molti casi questo avviene attraverso la mediazione di un pensiero proporzionale poco a poco sempre più esplicito e più “robusto” (stabile, trasferibile, reversibile, centrato sul presupposto dell'unità ... molto prima e meglio, se si procede con delicatezza e accortezza, di quanto si voglia far credere): e questo anche al di là dell'azione/discorso esplicitato, che al tempo stesso lo definisce, lo sviluppa e lo rivela. (Infiniti esempi sono possibili, tratti dalle dinamiche di lavoro in classe). In particolare, attraverso la pratica parallela delle gestioni proporzionali in contesti percettivamente ben controllabili nel loro insieme attraverso piccoli numeri e piccole lunghezze, si arriva con naturalezza a esplicitare la natura convenzionale (al tempo stesso flessibile e strutturante) della

definizione stessa dell'unità (a base discreta o continua che sia). (Cfr anche, più avanti, le riflessioni sulla meta-strategia di compensazione).

Quinto esempio

<Ma perché si pesano le cose, al mercato?>. <Beh, per due ragioni: prima perché devi sapere se ti fanno pagare i soldi giusti per il prezzo che c'è scritto, e poi perché devi sapere quanto te ne serve per quello che devi cucinare, come c'è scritto sulla ricetta, e per le persone che lo devono mangiare...> (4a elem).

Proporzioni su proporzioni, dunque, attraverso tutta l'esperienza e la competenza di vita: attraverso la percezione, l'azione finalizzata, il linguaggio. Dai primi mescolamenti-soluzione a scuola d'infanzia (*<più chiaro... più scuro...>* come *<più dolce... meno dolce...>*) alle ricette sempre più sofisticate in secondo ciclo (*<ingredienti e dosi per fare un veleno per far morire una strega sola, e anche quante streghe si vuole...>*).

Proporzioni messe in atto necessariamente (e pure quasi subdolamente negate da molta didattica corrente a livello di consapevolezza e quindi di autonomia cognitiva): a partire dal contesto prototipo di costo-quantità-prezzo (con quell'autentico sgorbio concettuale che è il "costo unitario" non esplicitato come prototipo di proporzionalità contratta); fino al "rifiuto" quasi sistematico di sforzarsi a capire evocato nei ragazzi di molte scuole medie quando si pretende di parlare, a distanza di tempi e contesti, di peso specifico o di velocità o di concentrazione o di geometria di un "raggio di luce" ... o magari (succede!) di pressione o lavoro di "una forza" (e la "pressione del sangue", allora, che cos'è?...).

E così via esemplificando, ancora negli anni della scuola media: dalla proporzionalità alla forza totale della deformazione elastica unidimensionale (ma cosa succede schiacciando sul tavolo una spugna con un dito?...); fino alla proporzionalità all'inverso del quadrato della distanza dell'illuminamento da "sorgente puntiforme" (ma perché se la base della "piramide dei raggi" cresce linearmente in proporzione alla distanza, "ci si vede" non in proporzione alla distanza, ma al suo quadrato?...).

Sesto esempio

Primo anno all'università.

*<Non abbiamo capito bene cosa succede "in realtà" quando si fanno derivate e integrali ... ci servirebbe una spiegazione ...anche semplice, non tipo teorema ... per sapere cosa si deve controllare quando si vuol fare una derivata ...cosa succede quando si fa un integrale ...> <...>
<... oh, no! ... non vogliamo spiegazioni "con" le proporzioni, così è inutile ...noi le proporzioni a scuola non le abbiamo mai capite...>*

<Va bene fare lo sviluppo di Taylor, per un tratto dato, intorno a un certo x^ : ma x^* dove si può/deve prendere?> <Non importa...: una volta che si è fissato l'intorno, poi x^* si può prendere dove si vuole sulla curva...>*

Si è, ormai, "grandi": ma i problemi di un pensiero proporzionale non introiettato continuano ad affiorare nei momenti e nei modi più impensati. E a che "recupero" si può pensare?

(2) PROPORZIONE: UN MODO PER STRUTTURARE SEMANTICA E SINTASSI

*** Prendiamo come sistema-prototipo i soliti due triangoli rettangoli scaleni (cateti e ipotenusa di lunghezze A,B,C per uno dei due, a,b,c per l'altro, in corrispondenza lato-lettera). In questo modo avremo come riferimento-base, a cui confrontare quello che succede in contesti diversi, un sistema spaziale (la strategia di strutturazione spaziale è sotto diversi aspetti fondante, e quindi fondamentale, per tutta la costruzione cognitiva “astratta”, di qualunque tipo e livello). Se i triangoli sono simili o no lo si può anche decidere, per dimensioni contenute entro il campo visivo, “a occhio” – una volta capito bene cosa vuol dire “simile”; e la capacità di discriminazione può essere ben verificata p.es. sulla base di un confronto fra molti modelli mobili di carta. (Il potere risolutivo sperimentale di un ragazzino medio nell'eseguire questa discriminazione è dell'ordine di tre-quattro gradi, su figure dell'ordine dei decimetri). Nel frattempo, si può misurare (in molte situazioni): con un po' di fatica si constata allora che essere simile (avere la stessa forma) vuol dire (fra l'altro) che *<le lunghezze dei lati “stanno”...>* (*<Però, a occhio non si direbbe...>*). A legare fra loro i due triangoli attraverso i loro elementi emergono poi rapidamente diverse altre relazioni numeriche possibili: allora, disponiamoci ad esplorarle e ordinarle con pazienza – fin dall'inizio, e in modi diversi, e senza eccessiva fretta di “chiudere” quello che si può capire in formulazioni simbolizzate in modo standard.

$A:a = B:b$ (etc). E' la *proporzione vista-come “semanticamente omogenea”, “esterna”* rispetto ai sistemi a confronto (mette in relazione diretta fra loro elementi che sono “corrispondenti in significato”, ma si trovano all'interno di due sistemi diversi: i due cateti lunghi, i due corti, le due ipotenuse, due mediane corrispondenti, etc): in pratica *può definire attraverso due figure-prototipo una trasformazione di ingrandimento (relazione esterna) a forma invariata*, eventualmente valida anche per altre figure che si trovino strutturalmente legate ai due triangoli (p.es. disegnate sullo stesso acetato sottoposto a proiezioni diverse ... oppure ...). Notare che qui ogni rapporto fra lunghezze è banalmente adimensionale (cioè esprimibile secondo il prototipo numerico di “volte”).

Sono ovviamente dello stesso tipo (4) relazioni come SPAZIO:spazio = TEMPO:tempo (p.es. per due diversi intervalli all'interno dello stesso movimento – p.es. dello stesso modo di muoversi uniformemente); COSTO:costo = QUANTITA':quantità (p.es. per due diverse merci vendute allo stesso prezzo uniforme); PESO:peso = VOLUME:volume (p.es. per due diversi materiali di densità uniforme); e così via. Anche qui i rapporti omogenei (quelli fra grandezze corrispondenti selezionate in sistemi diversi) sono adimensionali, e questo illustra chiaramente la loro natura: però non lo saranno più quelli disomogenei, in cui variabili diverse (in questo caso relative allo stesso sistema) vengono poste in relazione fra loro, dando luogo a rapporti che hanno il significato generale di “fattori di forma”.

$A:B = a:b$ (etc). E' la *proporzione vista-come “semanticamente disomogenea”, “interna”* rispetto ai sistemi a confronto (mette in relazione diretta coppie di elementi di diverso significato, che sono interne a ciascuno dei due sistemi): in pratica in questo modo si *può definire la “forma” stessa del sistema attraverso la relazione interna, forma che resta invariante in un ingrandimento e permette di definire intuitivamente la similitudine*. Qui il rapporto, ancora ovviamente adimensionale nel caso della geometria ma con un nuovo significato angolare, diventa in genere intrinsecamente dimensionale: ed è ben noto che fare direttamente rapporti fra grandezze semanticamente disomogenee era “vietato” per i greci antichi. Ma Archimede lavorava già con dimensioni geometriche non omogenee; mentre la semantizzazione del rapporto (e del prodotto) fra grandezze non omogenee ha costituito un vero e proprio punto di rottura epistemologica da parte di Galileo – in particolare nei confronti della tradizione medievale. Nel caso del moto uniforme infatti la relazione di proporzione disomogenea definisce esplicitamente *l'invariante velocità* (al variare dell'intervallo considerato), nel caso delle merci *l'invariante prezzo al variare della quantità*, e così via. (Notare che Galileo nelle sue “dimostrazioni” ha esplicitamente introdotto la “mappatura” della

variabile astratta tempo secondo una lunghezza, rappresentabile e operabile come una delle due dimensioni del piano euclideo. Questo cruciale passaggio cognitivo, che apre la strada alla rappresentazione e alla gestione algebrica, quindi su un “piano cartesiano astratto”, delle relazioni fra due variabili qualsiasi, deve essere ripercorso più e più volte, con attenzione interna e supporto esterno adeguati, da ogni ragazzo nel suo percorso di comprensione).

(Il fatto poi che le due relazioni di proporzionalità, omogenea e disomogenea, siano concettualmente e numericamente “riducibili” una all’altra nel rappresentare in modi diversi la stessa relazione di similitudine fa parte delle proprietà strutturali delle operazioni “moltiplicative” fra numeri, e quindi, al tempo stesso, dell’isomorfismo numerico-spaziale: ma costituisce a sua volta una cruciale conquista cognitiva, per nulla ovvia a priori ma da sperimentare e stabilizzare gradualmente. Questo vincolo all’apprendimento significativo è apparentemente poco chiaro anche a molti estensori di libri di testo: insieme a quelli posti dalla non sommabilità semantica di qualunque tipo di rapporto, anche se il valore numerico dello stesso rapporto ovviamente lo è; dalle “proprietà” della proporzione che fanno intervenire somme fra elementi, constatate numericamente e non interpretate; e così via).

$A \cdot b = a \cdot B$. E’ la terza relazione possibile fra coppie di elementi, numericamente (sintatticamente – cfr qui sopra) “ovvia” ma di fatto semanticamente disturbante. Innanzitutto il prodotto fra lunghezze (fra due grandezze dimensionate) ha come referente una superficie (una nuova grandezza, intuitivamente ben diversa), e non più una numericità adimensionale (proporzione omogenea) o angolare (proporzione geometrica disomogenea) o di “variazione relativa” (grandezze dimensionate). Non è molto difficile individuare geometricamente la superficie in questione, a partire dalle due figure: ma la sua stessa costruzione dis-integra i significati più direttamente legati alle figure stesse. D’altra parte non è immediato trovare nella geometria euclidea semplici situazioni problematiche la cui soluzione passi attraverso questa relazione: la conclusione più immediata, se ci si ferma a pensarci su, è che *<fare questa moltiplicazione non ha molto senso>*. *<Però è come moltiplicare patrizi per piedi e plebei per testa...>* scopre qualcuno, confrontando visivamente le due situazioni.

Cose a ben pensarci non molto diverse succedono in tutti i contesti in cui due variabili sono legate da relazioni di proporzionalità, avendo <però> diverso significato fisico (diversa dimensionalità): contesti semantici come quelli di velocità, prezzo, densità etc non permettono infatti di assegnare un significato diretto a relazioni moltiplicative di questo tipo (generalmente “incrociate”: $\text{spazio}_1 \times \text{tempo}_2 = \text{spazio}_2 \times \text{tempo}_1$, ... etc). D’altra parte queste relazioni, ben evidenti numericamente e sintatticamente, invece di essere soggette ad un uso “semanticamente oscurato” da parte dei ragazzi (<solo per fare i passaggi>), potrebbero essere sfruttate proprio come avvio ad una comprensione “astratta” della “compensazione” come fenomeno strutturale legato alla strategia moltiplicativa, e ai corrispondenti modi di “ibridare” fra loro (per rapporto e per prodotto) due variabili semanticamente marcate..

*** Si può, ora, “cambiare gioco”: continuando a riferirsi a due generici triangoli rettangoli, si può lasciare l’analisi delle relazioni di similitudine (invarianza di forma), per esplorare quelle di equivalenza (invarianza di estensione). E’ importante notare subito che qui il lavoro “a occhio” è (per motivi cognitivi spiegabili ma non banali) molto meno immediato/preciso: ma vale comunque la pena di esplicitarlo a fondo, lavorandoci con i ragazzi (p.es. immaginare, e ritagliare, triangoli rettangoli tutti appartenenti ad una stessa “famiglia di equivalenza”, piuttosto che alla stessa “famiglia di similitudine”...); mentre di questa dissimmetria di fondo va tenuto conto in tutte le attività didattiche.

$A \cdot B = a \cdot b$. Ora i due triangoli (sempre rettangoli, per semplicità – e qualcuno preferisce vederli come rettangoli...), hanno la stessa area, anche se il fatto non è così “chiaro” percettivamente:

infatti la “triangolarità retta” rimane, ma la “forma propria” può essere anche molto diversa. E qui *<i due lati si con-fondono uno con l’altro, per fare l’area...>*. E avere la stessa area corrisponde a un significato ben preciso ...

$A:a = b:B$. Qui si procede “alla rovescia”, rispetto a prima: dall’uguaglianza dei prodotti a quella dei rapporti. *<Allora, di quanto uno dei due triangoli è più “alto”, di altrettanto l’altro è più “largo”>*; di nuovo, si tratta di un rapporto adimensionale. Certo “è ovvio” che debba essere così: se i due (rettangoli, è più facile) devono avere la stessa area, bisognerà pure che i loro lati si “compensino”... Parola-concetto cruciale: la “*proporzione inversa*” (brutto modo di dire), se pure *numericamente (sintatticamente) indistinguibile da una “proporzione diretta”, è caratterizzata e differenziata da una semantica primaria di “compensazione estensiva”, in contrasto all’altra relazione di proporzionalità che è caratterizzata da una semantica primaria di “compensazione intensiva”*. E’ proprio per questo che la sua “definizione-tipo” passa attraverso la moltiplicazione, invece che attraverso il rapporto. Ed è proprio per questo che la discriminazione semantica e sintattica fra nuove-variabili estensive (sommabili, come le aree) e nuove-variabili intensive (non sommabili, come le tangenti degli angoli) deve accompagnare e indirizzare fin dall’inizio ogni competenza numerica e algebrica – in particolare quella necessaria a correlare strutture matematiche e strutture fisiche.

$A:b = a:B$. La forma è analoga alla precedente: qui però si confrontano direttamente il “più alto” dell’uno con il “più largo” dell’altro: per una compensazione immediatamente percepibile le due figure potrebbero essere uguali (e allora basterebbe ruotare i rettangoli, o ribaltare i triangoli, per vederlo chiaramente...); però non è detto che lo siano, e allora bisogna guardare meglio... (Anche molti adulti hanno difficoltà a trovare significato per questa forma).

Cosa succede con semantiche fuori da quella della geometria, in cui pure la compensazione estensiva è relativamente abbastanza comune? Bisogna andare a scovare i (molti, spesso non banali) *contesti in cui una nuova variabile significativa è strutturalmente definita da un prodotto* (p.es., a livello elementare: peso x distanza, nell’equilibrio di masse su una barra omogenea e simmetrica imperniata al centro; corrente x tensione, o corrente x resistenza, in un circuito a corrente continua; massa x dislivello di temperatura, in uno scambio di calore; ...), *invece che da un rapporto* (p.es., a livello elementare: contesti di velocità, densità, concentrazione, prezzo, elasticità, dimensioni delle figure d’ombra, ... etc). Rendendosi gradualmente conto che da un lato la “pura sintassi” della proporzione è comunque priva di significato, e quindi incapace di discriminare proporzioni dirette o inverse (cfr le difficoltà sempre connesse alla costruzione graduale dell’idea stessa di “puro numero”...); mentre è proprio attraverso l’attribuzione di significati differenziati (semantizzazioni diverse in contesti diversi) che si dà vita a strutture cognitive complesse capaci di crescere su sé stesse.

*** Resta un doppio problema di fondo.

- a) Un problema epistemologico, se così si vuol dire. Semantica e sintassi sono sempre (in matematica come nella lingua o in qualunque altro sistema simbolico) strettamente (indissolubilmente) intrecciate: sia nelle dinamiche di realtà, sia in quelle di pensiero. Nate in sinergia-contrasto reciproco, sia nell’evoluzione culturale che nello sviluppo individuale, sintassi e semantica solo attraverso un continuo confronto dialettico possono definirsi e stabilizzarsi come modi di guardare sempre cruciali e sempre complementari. (In generale i “modi di guardare” corrispondono a proiezioni su sottodimensioni, non a partizioni in sottoinsiemi, dello spazio delle possibilità cognitive. Ma qui il discorso di modellizzazione del conoscere si fa complesso). D’altra parte una competenza flessibile e creativa nel disintreccio-gestione separata-reintreccio di sintassi e semantica costituisce una conquista cognitiva e uno strumento culturale raffinato e potente: alla cui socializzazione (a livelli opportuni) la scuola dovrebbe dedicarsi in tutto il suo percorso. Il pensiero proporzionale costituisce d’altronde solo un caso emblematico: lo stesso vale per il pensiero algebrico, il

pensiero differenziale, il pensiero funzionale, il pensiero logico ... e quant'altro; ma questo significa la necessità di una consapevolezza adeguata, e di una progettazione flessibile ma coerente a lungo (lunghissimo) termine, in chi ha la responsabilità di proporre e gestire la mediazione didattica.

- b) Un problema didattico, se così si vuol dire. Se viene sostenuto (non forzato!) in modo graduale e coerente a partire dalla scuola dell'infanzia, il pensiero proporzionale si sviluppa tranquillamente (e con grande soddisfazione dei suoi utenti) fino ai livelli appena sopra accennati: entro la scuola di base, per la maggior parte dei ragazzi/e. (Già a fine elementare si possono affrontare bene problemi di isomorfismo proporzionale fra prezzi, pendenze, densità, concentrazioni, velocità etc). Se però viene ignorato nella varietà delle sue strategie, e/o reso asfittico sotto mentite spoglie a livello di infanzia-elementari, e poi affrontato in modi cognitivamente e culturalmente repellenti come quelli consacrati da tanti testi (di matematica e scienze) della scuola media, il pensiero proporzionale si spegne nella maggior parte dei ragazzi (e dei cittadini), rimanendo uno dei due o tre strumenti-principe di selezione (pseudo)culturale ancora ben attivi fino all'università, e oltre.

Già: "che fare", allora? Per intanto un sano esercizio di indignazione, a partire dalla constatazione diretta dei disastri stratificati sulla pelle propria e altrui, e dagli indici dei libri di testo, potrebbe arricchire la formazione dei futuri docenti; accompagnato da suggerimenti efficaci su come uscire dalla trappola del "girare a vuoto", una volta coinvolti, e su come evitare ad altri di caderci. In particolare, sembra importante non farsi "spaventare" dalla relativa complessità delle relazioni di significato, così come è stata appena descritta: se a prima vista (e correttamente) risulta improponibile un insegnamento diretto in termini di classificazioni incrociate (proporzioni dirette e inverse, interne e esterne, omogenee e disomogenee, che coinvolgono variabili intensive o estensive...), è altrettanto improponibile far finta di niente di fronte a una situazione che di per sé è oggettivamente complessa, e come tale necessita di una mediazione attenta e competente. Come in altri casi del genere, si tratta piuttosto di introdurre fin dall'inizio una gestione verbale, operativa e rappresentativa efficace e non ambigua da parte dell'adulto: attendendo nei tempi lunghi i risultati delle esperienze variate e invarianti per cercare di rendere esplicito e ben controllabile quello che via via si capisce.

(3) INTERMEZZO: PROPORZIONE E COMPENSAZIONE ALLA BASE DEL CAPIRE-FISICO

Anche se solo superficialmente, è importante accennare al ruolo fondante assunto dal pensiero proporzionale in tutta la costruzione del pensiero fisico. Il nodo cruciale è costituito dalla strategia (generalmente algebrica, ma specificamente fisica) di costruire mentalmente "spazi astratti" le cui dimensioni siano definite da "nuove" variabili, riconosciute come relazioni (combinazioni) semanticamente significative di altre variabili la cui semantica sia stata precedentemente validata. Si tratta, ovviamente, di una strategia tipicamente ricorsiva (si comincia a definire velocità come rapporto fra percorsi e tempi, reso significativo nello spazio p,t ; poi si definiscono prodotti significativi come mv e mv^2 , riferendoli a specifiche caratteristiche fenomenologiche dei moti osservati; e così via). D'altra parte appare evidente che a un livello di massima semplificazione, quale quello pragmaticamente affermatosi per il "significato fisico", la via del rapporto e prodotto per stabilire relazioni fra variabili diverse – quindi la via del pensiero proporzionale – è di fatto la più immediata.

Può essere significativo un esempio storico. Quarant'anni prima dei "Principia" di Newton, Torricelli enuncia la sua legge del moto in una forma (puramente linguistica) che potremmo trascrivere algebricamente come $F \, Dt = M \, Dv$. (D definisce un intervallo piccolo ma finito della variabile corrispondente). Proviamo a leggerla secondo il suo criterio: come "causa" del moto, l'intensità F della forza agente e l'intervallo di tempo Dt in cui si esercita la sua azione (circa costante) si "compensano" moltiplicativamente; allo stesso modo si "compensano" la massa M del mobile e il suo cambiamento di velocità Dv, nel definire l'"effetto" dell'azione di F sul moto stesso; complessivamente, <causa aequat effectum>. Dalla formulazione data seguono come "applicazioni" del pensiero proporzionale sia l'avvio agli aspetti di analisi "quasi-differenziale" eseguita sul moto ($F = M \, Dv/Dt$), sia l'avvio agli aspetti "quasi-integrali" (ovvii per $F = \text{cost}$).

Tre brevi commenti.

- Una formulazione di questo tipo della seconda legge della dinamica è (sperimentalmente) ben risonante con l'esperienza-pensiero-linguaggio degli studenti di oggi (come lo era con quella dei contemporanei di Torricelli); mentre si collega in modo naturale e efficace ai loro sviluppi (paralleli e interferenti) di competenza fenomenologica, di competenza fisica e di (incipiente) competenza di calcolo differenziale.

- Torricelli illustra la sua legge discutendone l'isomorfismo con il riempimento di un recipiente cilindrico (M ora corrisponde alla sezione costante, Dv al dislivello variabile) posto sotto un flusso d'acqua costante di intensità F per un intervallo di tempo Dt. Dalla presentazione di Torricelli stesso (come dai commenti risonanti dei ragazzi di oggi) è ben chiaro che qui non si tratta di "modellizzare" la forza con un flusso e la velocità con un riempimento ... etc. Quella che è in gioco è la plausibilità di un isomorfismo, i cui diversi ingredienti di esperienza vengono propriamente confrontati attraverso i rispettivi ruoli formali all'interno di due fenomeni: di cui uno è assai più "trasparente" dell'altro ad una analisi quantitativa circostanziata e variata.

- L'attuale disponibilità di efficaci (e trasparenti!) strumenti informatici per il calcolo delle "differenze finite" rende oggi la comprensione degli studenti ancora più agevole, significativa e articolata; mentre al tempo stesso li mette (se la disponibilità stessa è ben mediata) al riparo dal catastrofico errore "formale" in cui è poi incappato Torricelli (bloccato, quasi incredibilmente, da una personale rivisitazione del paradosso di Achille-e-la-Tartaruga. Sarebbe utile, anche agli stessi studenti, un'analisi particolareggiata di questa versione del paradosso, che conduce a una "percossa infinita" in corrispondenza agli infiniti tempuscoli in cui si può suddividere la caduta: paradosso visto innanzitutto come tipica "trappola" di un pensiero proporzionale non adeguatamente controllato nei suoi arditi "passaggi al limite", che arriva a bloccare la stessa comprensione fisica dei fatti).

Ancora un rapido cenno a un altro esempio storico, che si presta molto bene al ruolo di chiave per aprire spazi di comprensione (a partire da un livello di scuola media).

Supponiamo di mescolare una massa M1 di acqua a temperatura T1 con una massa M2 a temperatura $T2 < T1$, mantenendo per quanto possibile il sistema isolato dall'ambiente. La temperatura finale sarà Tf: intermedia fra le due iniziali, *tanto più vicina* a quella a cui corrisponde la quantità d'acqua *tanto maggiore* dell'altra (la correlazione qualitativa, ben basata sull'esperienza comune, "tende" ad esprimersi spontaneamente in termini di rapporti).

Alla fine del '600 Renaldini assoda che una buona relazione fra le cinque variabili in gioco è rappresentabile come $T_f = (M_1 T_1 + M_2 T_2) / (M_1 + M_2)$, e chiama questa relazione "media pesata" (con ovvii commenti sull'origine analogica del termine).

A metà '700 viene scoperta una "nuova" legge che mette esplicitamente in gioco la proporzionalità inversa: $(T_1 - T_f) : (T_f - T_2) = M_2 : M_1$.

A fine '700 Black "scopre" a sua volta che $M_1 (T_1 - T_f) = - M_2 (T_2 - T_f)$, e sulla base dell'isomorfismo evidente fra i due membri dell'uguaglianza "definisce" la nuova grandezza fisica "quantità di calore" $Q = M (T_i - T_f)$. Guardando-vedendo così le cose, la nuova grandezza Q appare manifestamente "conservata" nello scambio termico (fra due, ma anche fra molti sistemi),

aprendo la via a tutta la termodinamica (rivoluzione industriale inclusa). E a parte la difficoltà da parte di tanti scienziati di “riconoscere” forme diverse di una stessa relazione algebrica (fa molto bene ai ragazzi ritrovarsi ... in buona compagnia), è ancora una volta evidente quanto sintassi e semantica possano interferire: non solo fra loro, ma anche con la stessa struttura di causalità fisica percepita rappresentata e interpretata attraverso il filtro dell’espressione simbolica.

(Fra l’altro. La media pesata è una strategia fondamentale per controllare e progettare aspetti diversi in tutti i contesti che sono strutturati secondo vincoli di proporzionalità: strategia che peraltro è pervicacemente e inspiegabilmente ignorata in molti dei nostri (con)testi scolastici, sia di base che secondari).

(4) ALLA RADICE DEL CONFRONTO: DIFFERENZE E RAPPORTI

Torniamo alle radici del pensiero proporzionale, il confronto stabilito all’interno di un doppio rapporto. Il nodo fondamentale per la comprensione è cosa significa (come va letto) il segno “=”.

<Ma perché per confrontare percorso e tempo, e capire cos’è la velocità ... per confrontare costo e quantità, e capire cos’è il prezzo ... per confrontare peso e deformazione elastica, e capire la durezza ... per confrontare lo spostamento in orizzontale e in verticale, e capire la ripidità ... per confrontare le cose e lo spazio in cui sono messe, e capire la fittezza ... per confrontare quanto zucchero e quanta acqua, e capire la dolcezza ... ma perché bisogna sempre fare proprio una divisione – anzi due, se si vuol confrontare il confronto e vedere che è sempre lo stesso?>

Questo tipo di domande, che i ragazzi difficilmente riescono a esplicitare chiaramente, e gli adulti difficilmente riescono a prevenire o a soddisfare nella loro fretta di indurre comportamenti osservabilmente “corretti”, sono ovviamente cruciali sul piano delle strategie di mediazione didattica; restano tali attraverso il lungo periodo in cui avviene la prima stabilizzazione e la successiva strutturazione del “capire matematico”; se inverte, a lungo andare minano o distorcono o vanificano molti aspetti del capire stesso. Anche perché il pensiero proporzionale interferisce direttamente, come già notato, da un lato con le stesse dinamiche cognitive della “costruzione del numero”, di cui è ingrediente (non conseguenza) essenziale; da un altro con quelle, interferenti, di costruzione del “pensiero fisico”; infine con la costruzione di saperi formali e scientifici sempre più complessi.

In primo luogo si può ricordare quanto è importante accorgersi, e aiutare ad accorgersi, che:

- Di fatto possediamo *due e solo due modi*, cognitivamente elementari ma profondamente strutturanti in quanto radicati nella percezione e nell’azione, quindi nella lingua e nel pensiero naturali, *per confrontare* tra loro due elementi di realtà: che possono essere confrontati in quanto rappresentati da (proiettati su) due opportune variabili, di cui si confrontano i valori. Tali modi sono, ovviamente, *la differenza fra variabili (rese semanticamente omogenee)*, e *il rapporto fra variabili (qualunque)*.

- Queste due modalità di confronto possono essere sempre attivate e co-attivate, in parallelo o in intreccio reciproco, a livello “locale” del contesto, dando ovviamente luogo a “risultati potenziali” diversi sia nell’aspetto numerico sia nell’interpretazione. D’altra parte nella lettura/rappresentazione “formale” di una qualunque struttura problematica appena un pò complessa i diversi legami di relazione acquistano significati precisi a precise condizioni di “risonanza” globale fra forme e fatti: sia attraverso la scelta delle modalità formali “localmente adatte” (*<è un problema col più o un problema col per? ...>*); sia attraverso la “corretta strutturazione” reciproca delle diverse

formalizzazioni che risultano necessarie e sufficienti a dar conto di una corretta “sintassi complessiva” (<ma bisogna fare prima la sottrazione o prima la divisione? ...>).

(Forse vale anche la pena di notare che la scelta delle singole operazioni e la loro organizzazione reciproca, adatte a trascrivere una situazione problematica secondo uno schema globalmente coerente dal punto di vista sia semantico che sintattico, viene gestita da una meta-strategia cognitiva che è sostanzialmente analoga/contigua a quella che regola le correlazioni fra “logica dei predicati” e “logica delle proposizioni” all’interno di un discorso significativo articolato su base linguistica; mentre qualcosa di strettamente analogo accade sul piano della strutturazione dell’azione finalizzata, di cui in fondo la tra-scrizione e la soluzione di una situazione problematica sono solo un caso particolare. Questo è un altro dei motivi profondi per cui le strutture cognitivo-linguistiche e quelle cognitivo-matematiche, in sviluppo parallelo e intrecciato, sono strettamente collegate fra loro – per esempio in contesti di modellizzazione e di problematizzazione di quello che si può constatare o si può trasformare: e richiedono di conseguenza una mediazione didattica accorta, lungimirante e strettamente coordinata. Ma qui l’approfondimento porterebbe lontano).

- Proprio attraverso la discriminazione e la sistematizzazione, prima qualitativa e poi quantitativa, dei *confronti*, e dei *confronti multipli*, secondo *differenza* e secondo *rapporto* sempre visti a contrasto reciproco, si stabiliscono e stabilizzano *cognitivamente* le stesse strutture operatorie e formali “additiva” e “moltiplicativa”, insieme alle loro proprietà. (Non viceversa, come spesso superficialmente si crede confondendo dinamica di conoscenza e strutturazione disciplinare).

- Resta un vero e proprio paradosso cognitivo (in cui molti ragazzi rimangono impaniati, in assenza di un adeguato aiuto/indirizzo adulto): la “mossa formale fondante” che è alla base della competenza numerica (e non solo) – il riconoscimento cioè della relazione di uguaglianza e/o equivalenza per un aspetto che lega situazioni fattualmente diverse secondo altri aspetti – viene rappresentata nelle due strutture attraverso due entità strutturanti tra loro incommensurabili ma interconnesse (e, per giunta, di fatto sempre connesse a scelte arbitrarie): lo zero e l’uno. (<Uguali, quindi la differenza è zero ... uguali, quindi il rapporto è uno>: in qualche modo in totale indipendenza dall’entità quantitativa a cui ci si riferisce. <Ma appena sono diversi ...>).

- E resta in definitiva una forte indicazione cognitivo-didattica, quella di fare sperimentare fin dall’inizio ai bambini (prima di acquisire competenze di calcolo con numeri “grandi”) la costruttiva ambiguità e le diverse potenzialità di risonanza col contesto sempre implicita nella *scelta fra guardare-per-differenza e guardare-per-rapporto*. Indagando e capendo gradualmente, attraverso il tempo ma anche attraverso la mediazione didattica aggiustata alle potenzialità e difficoltà di ogni momento, tre aspetti fondamentali. A *livello sintattico*, la struttura unidimensionalmente simmetrica intorno allo zero nella relazione additiva, e quella bidimensionalmente simmetrica intorno all’uno nella relazione moltiplicativa, con tutte le strategie di azione numerica che ne conseguono; a *livello di stabilizzazione cognitiva*, la corrispondente (sovrapposta!) strutturazione spaziale della linea e del piano, essenziale anche per un significativo raccordo fra aspetti continui e discreti in ciascuna delle due strutture e nelle reciproche sovrapposizioni; a livello semantico, una interpretazione basata su stati-trasformazioni (stati intermedi, trasformazioni equivalenti, e così via) per ambedue le strutture nel comune spazio astratto.

- Infine. Allo stesso modo in cui lo è il confronto singolo, il *doppio confronto* (*uguaglianza di differenze per la traslazione, uguaglianza di rapporti per la proporzione*) costituisce una delle strutture portanti della fenomenologia, quindi dell’esperienza, quindi delle strategie di conoscenza quotidiana e comune: strategie che sono implicitamente e potentemente trasmesse attraverso quella risonanza fra natura e cultura che lega, in interferenza continua, i canali di percezione e azione, rappresentazione iconica e linguaggio. Come tale, dunque, questa tipologia/famiglia di “mosse cognitive di confronto strutturante”, già in evoluzione spontanea nei primissimi anni di vita, va accortamente “recuperata” valorizzata e arricchita fin dall’inizio dell’esperienza scolastica; gradualmente esplicitata in contesti e in semantiche differenziate; indirizzata a convergenza di senso e significato attraverso pratiche diverse, in particolare secondo modalità spaziali e attraverso il controllo dei “numeri piccoli”: prima che l’incubo del calcolo con i “numeri grandi”, di per sé pur

necessario, risucchi e obliteri le possibilità di comprensione e strutturazione strategica. (Non si tratta di incentivare il precocismo: solo di sapere che interventi-supporti mancati o distorti producono danni irreversibili. Qualcosa di adatto lo sappiamo pur fare, dopotutto abbastanza bene, per “insegnare” a camminare o a parlare: e le persone imparano a parlare e a camminare in modo “normale”, e quello che hanno imparato lo esercitano con gusto - crescente attraverso la loro crescita. Perché non cerchiamo seriamente un modo decente di fare qualcosa di adatto per “insegnare” a contare, in modo da produrre un apprendimento che sia stabile, cresca su sé stesso e non sia accompagnato da disgusto?).

Più specificamente, confrontando (facendo confrontare) le due strutture di doppio (multiplo...) confronto (struttura additiva e struttura moltiplicativa: ma attenzione ai livelli di astrazione!), vale la pena di notare (e far notare) ancora alcuni aspetti.

- *Nella doppia differenza si tratta comunque con una sola variabile* (eventualmente “forzosamente” ridotta tale nello specifico contesto-scopo, attraverso un processo di generalizzazione o particolarizzazione di classi, e di riduzione di unità: alcuni parlano di una sola “grandezza”), dando luogo a una possibile rappresentazione spaziale lineale (in particolare rettilinea); mentre *nel doppio rapporto si tratta comunque con due variabili*, spesso dimensionalmente diverse (due “grandezze”), e quindi da rappresentare inevitabilmente in modo bidimensionale. Da questo punto di vista le comuni presentazioni a base lineale della moltiplicazione come addizione ripetuta, quindi delle divisioni “di contenenza” e “di ripartizione”, costituiscono molto spesso fonte primaria di malinteso, sintattico e semantico. Sia perché escludono in pratica dal gioco cognitivo tipi di rapporto più delicati da capire, p.es. quello fra variabili eterogenee o quello stesso di ingrandimento, che sono comunque alle radici del pensiero proporzionale su base percettiva, e che possono diventare difficili da “giustificare” in un secondo momento; sia perché negano apriori una ragionevole comprensione del fatto che solo attraverso un rapporto visto e espresso con una marcatura semantica adatta – come p.es. quello fra “cose” e “cose-alla-volta” - si può ottenere un risultato semanticamente significativo – in questo caso esprimibile in “volte”; e così via variando. (Cfr anche il prossimo paragrafo 5).

- Il meta-isomorfismo “algebrico” fra struttura additiva e moltiplicativa, troppo “difficile” da discutere come tale a livello di scuola di base, costituisce d’altra parte un fatto di realtà estremamente significativo: come tale ben osservabile e rappresentabile schematicamente, cognitivamente incisivo, didatticamente efficace. Così è importante rilevarlo per gradi, con sistematicità e secondo un mettere-ordine progressivo: sia rendendo al più presto esplicite nelle due strutture le rispettive “proprietà” (non si impara a gestire con competenza le operazioni se non si capiscono, a livello adeguato ma precocemente, le loro specificità definitorie, viste e apprezzate come vincoli e al tempo stesso garanzie di invarianza strutturale); sia attraverso un uso guidato e efficace della rappresentazione spaziale “a quadrato” dei quattro numeri coinvolti, esplicitandone anche le diverse dimensionalità. Questa rappresentazione infatti da un lato permette di introiettare anche percettivamente la simmetria fondamentale che regola le combinazioni “lecite” e il significato complementare delle operazioni eseguite sui lati corrispondenti (differenze, rapporti) o sulle diagonali (somme, prodotti); dall’altro esplicita e sintetizza icasticamente la sostanziale continuità/contiguità del “guardare secondo tre numeri” (operazioni singole) e del “guardare secondo quattro numeri” (traslazioni e proporzioni).

In definitiva.

- La padronanza dei quattro “giochi” fondamentali che si possono giocare con due variabili (o “grandezze”: “lavorare” variando i contesti secondo strategie a differenza o a somma costante, a rapporto o a prodotto costante) dovrebbe costituire uno degli obiettivi-cognitivi-cardine al centro dell’educazione matematica di base. Da un lato, intorno a questi “giochi” si dovrebbero articolare le

corrispondenti competenze di pensiero proporzionale e di pensiero traslazionale (se così si può dire); e quindi si dovrebbe sviluppare la competenza nel gestire le strutture additiva e moltiplicativa in tutti gli intrecci e sovrapposizioni che rendono realtà di ogni tipo “complesse ma non complicate” da capire (almeno in prima approssimazione).

- Queste strategie “formali”, d’altra parte, sono coinvolte in modo cruciale anche in tutte le situazioni significative di modellizzazione e/o problematizzazione di contesti (fisici, nei casi più semplici e trasparenti; ma non solo) in termini di relazioni e correlazioni fra variabili, e di “definizione” di sempre nuove variabili significative. Al tempo stesso costituiscono anche la base strumentale per sviluppare e interpretare correttamente operazioni e operatività “formali” via via più complesse (fino a uno sviluppo in serie di Taylor, o agli stessi fondamenti del calcolo).

- Ovviamente (?) la “rappresentazione” spaziale (cartesiana, ma non solo e non subito: conviene comunque partire anche da relazioni e correlazioni d’ordine fra variabili a due dimensioni, utilizzando movimento e rappresentazione) è cruciale nel rendere tali giochi “strategici” cognitivamente accessibili, gestibili, trasformabili – quindi effettivamente dominabili e utilizzabili - quindi di per sé motivanti. Soprattutto è cruciale nel rendere evidente quanto le strategie di linearità additiva e moltiplicativa siano da un lato solo un prototipo estremamente limitato di relazione fra variabili (sul piano, come nella realtà, è più che evidente che il vincolo di relazione fra le variazioni di due variabili può essere veramente “di forma qualunque”); dall’altro, un ingrediente/strumento essenziale alla gestione sempre più accurata di “qualunque” complessità.

- Il fatto che *strutture cognitive, strutture fattuali e strutture formali* si vengano spesso a trovare in *reciproca disponibilità-di-risonanza*, articolata secondo “semplici” elementi sintattici, semantici e rappresentativi, può di per sé apparire variamente “divertente” (per un ragazzo), o variamente “stupefacente” (per un adulto anche un po’ smaliziato). In realtà la cosa non è poi così strana: se si pensa che i tre tipi di strutture e i tre tipi di elementi sono stati, in relazione all’esperienza di ogni singola persona, reciprocamente pre-aggiustati attraverso i tempi smisurati dell’evoluzione biologica (a cominciare da quella percettiva) e quelli comunque lunghissimi dell’evoluzione culturale (a cominciare da quella linguistica). In questa luce può essere utile guardare/vedere le quattro strutture di cui parliamo come diverse esplicitazioni elementari (in origine a base sostanzialmente spaziale e gestuale) di un’unica meta-strategia di categorizzazione e gestione di realtà: meta-strategia che potrebbe essere utile individuare come di *compensazione generalizzata*, attiva nel mantenere invariati rapporti e differenze (prodotti e somme) appunto attraverso variazioni “compensate” delle variabili a confronto. E’ infatti *l’invarianza attraverso le variazioni una delle chiavi fondamentali per “capire”*: ogni tipo di matematica, a cominciare dalle diverse geometrie; ogni tipo di fisica, a cominciare da equilibri e conservazioni, equazioni di stato e equazioni di trasformazione; ogni tipo di scienza. (Forse anche ogni tipo di arte, o di filosofia. Ma di nuovo il discorso andrebbe troppo lontano).

- Per finire. A ben guardare buona parte del materiale “didattico” corrispondente a questi suggerimenti è già presente in molti testi (e in molte proposte curriculari, e in molte pratiche scolastiche), in particolare a livello di Scuola Media. Ma troppo spesso le proposte sono talmente frammentate, particolarizzate e quindi frastornanti, e talmente mancanti di solide basi cognitive su cui svilupparsi con significato solidamente “astratto”, da precludere di fatto una comprensione strutturale (gestaltica, verrebbe da dire), quindi stabile significativa e di fatto utilizzabile: quella comprensione che <... *per chi non la intende, è come aggirarsi per un oscuro laberinto* ...>. (Bravo Galileo! ai nostri ragazzi succede esattamente questo).

Al tempo stesso, e proprio per quanto appena detto sopra, gli intrecci fra rapporti costanti o differenze costanti, fra somme costanti o prodotti costanti, costituiscono le strutture formali di base da cui sono innervate le situazioni e i processi di fenomenologia e di vita quotidiana. Il collasso di

una realistica “competenza” matematica di base (spesso aggravato da addestramenti privi di significato e di presa) trascina allora con sé l’accesso alla competenza “scientifica” (o di interpretazione controllabile dei fatti), e la motivazione ad ambedue; mentre anche il viceversa è assolutamente altrettanto vero. La frustrazione del non capire le cose culturalmente sofisticate che la scuola spesso propone e impone si sovrappone a quella, ben più bruciante anche se spesso implicita e inespressa, del non essere aiutati a “capire” nemmeno i fatti in cui si è vitalmente immersi. Ancora una volta, la nozione cognitiva fondamentale è quella di “intreccio”. Il motivo di fondo per cui i nostri ragazzi imparano così difficilmente a “fare i problemi”, e quasi mai a leggere (modellizzare) i fatti del mondo secondo categorie matematiche anche elementari, è che di fronte ad una realtà di per sé intrinsecamente intrecciata noi insistiamo a pretendere da loro capacità esecutive discretizzate e isolate (trasferibili per puro condizionamento passivo), a monte e a spese delle capacità interpretative di correlazione (mediabili soltanto attraverso la risonanza fra spiegazione e comprensione, e comunque bisognose di molto maggiore impegno da ambo i lati). A intrecciare e disintrecciare strutture formali di fatti si può insegnare, e imparare (e neanche tanto difficilmente): purché lo si faccia in maniera sistematica, variata, progressiva, intelligentemente guidata; sostenuta e ricompensata da un successo sul piano del senso e del significato che rapidamente autocostruisce ulteriore motivazione. (Ma se riteniamo di far troppa fatica quando siamo confrontati con il nostro spiegare, perché poi ci lamentiamo del loro non-capire?).

(5) ANCORA ALLE RADICI: LE STRUTTURE ADDITIVA E MOLTIPLICATIVA

Fa parte dell’evidenza storica (evoluzione delle pratiche e della cultura) e dell’evidenza cognitiva (sviluppo della comprensione e dell’azione controllata) il fatto che il significato e la padronanza delle singole operazioni sono strettamente legati a quelli della loro strutturazione reciproca. (Riprendendo il parallelo accennato in precedenza, allo stesso modo logica dei predicati e logica delle proposizioni si evolvono/sviluppano di pari passo, a livello non specialistico). In particolare, fa parte dell’evidenza che emerge dalla ricerca didattica il fatto che il pensiero proporzionale (e quello traslazionale), radicato com’è in strategie vitali di percezione e azione, spesso precede e comunque accompagna nell’esplicitazione e nell’organizzazione “naturale” quello di tipo moltiplicativo (o additivo) esplicitato nella sua sintassi. E di questa realtà le strategie di insegnamento dovrebbero tener conto, per sfruttare al massimo le potenzialità di risonanza fra pensiero realtà e cultura. Anche se non è questa la sede per approfondire il problema, tuttavia alcuni ulteriori, rapidi cenni alle basi cognitive delle strutture additiva e moltiplicativa possono essere forse utili a definirlo meglio.

- Le strutture additiva e moltiplicativa hanno in comune alcune problematiche “fondanti”: la dimensionalità delle variabili numeriche coinvolte, il riferimento, l’unità di discretizzazione.

- La struttura additiva è intrinsecamente unidimensionale, e implica sia omogeneità qualitativa (selezione di una classe comune a tutti i termini coinvolti) sia omogeneità quantitativa (selezione dell’“unità equivalente”). Attraverso la corrispondenza percettiva fra “volte” (azioni soggettive elementari di centratura di attenzione) e “cose” (oggetti elementari autoconsistenti – p.es. solidi), attivata dai gesti e dalle loro tracce (mnestiche e oggettivate), si stabiliscono e si stabilizzano le strategie fondamentali. Nell’uomo tali strategie, presenti per numeri piccoli anche in molti animali, vengono esplicitate (e così ulteriormente stabilizzate) attraverso forme linguistiche che, a differenza delle azioni, non sono strettamente codificate nella loro forma. (<Quattro volte una cosa per volta “è come”, “può corrispondere” a quattro cose>: è la base stessa del “contare”, già acquisizione

complessa nel porre in risonanza stabile ordinalità memoria e cardinalità, ma ancora lontana dalle codifiche formali di operazioni e uguaglianze).

- La struttura moltiplicativa, invece, è intrinsecamente bidimensionale e ha la sua radice in un doppio “salto logico”, che emerge (precocemente ma gradualmente) dalla padronanza stessa della struttura additiva.

Da un lato infatti si può “*contare per ...*”: indipendentemente dall’equivalenza numerica globale, da costruire pazientemente, ha senso e significato primario (connesso al contare stesso, e ben verificabile attraverso l’agire controllato) *l’azione complessa* <quattro volte tre cose per volta>. Poi, si acquisirà lentamente che tale azione <è come ... corrisponde a ... dodici volte una cosa per volta, sei volte due cose per volta ...>, etc; che ha qualcosa di strutturalmente simile a <quattro volte dieci cose per volta>, etc; mentre, benché ben diversa, conduce allo stesso risultato numerico globale di <tre volte quattro cose per volta>. E così via.

Da un altro lato si possono contare gli addendi di una somma: indipendentemente da qualunque numero e misura, è chiaro che questi quattro pezzi di spago (in genere diversi fra loro) equi-valgono per “lunghezza consecutiva” a quest’altro unico pezzo. Di nuovo il numero (inesorabilmente intero) che definisce le “volte” in cui si compie l’azione di “aggiungere” (la prima volta a zero!...) ha una semantica del tutto diversa (è di un diverso “tipo logico”) da quello che definisce una estensione, discreta o continua: anche se questa può essere, a sua volta, “proiettata” su base numerica intera attraverso un conteggio di “volte di unità”... .

- In questo modo la struttura moltiplicativa emerge come struttura di relazioni fra due diverse semantiche che, per essere ben colte, capite e rappresentate hanno quasi sempre bisogno del “passaggio” cognitivo attraverso l’interfaccia di una struttura spaziale bidimensionale: duramente e coerentemente metaforica, come essa si presenta nella maggior parte dei casi. (Dallo schieramento piano, trattando con discreto vs discreto, al piano cartesiano, trattando con continuo vs continuo; dalle otto-figurine-al-pacchetto, ai quattro-euro-al-chilo ...).

Corrispondentemente, ogni moltiplicazione è sempre del tipo (volte x cose/volta >>> cose), oppure del tipo (sec x metri/sec >>> metri, kg x euro/kg >>> euro), oppure ancora del tipo (metri x metri >>> metriquadrati), oppure ...; e ogni divisione è sempre del tipo (cose : cose/volta >>> volte) oppure del tipo (cose : volte >>> cose/volta, euro : kg >>> euro/kg ...) e così via e così via e così via. (Notare che con grande naturalezza, quasi sempre repressa a scuola, può emergere la parallela consapevolezza di una particolare tipologia di “contrari”: velocità come lunghezza:tempo, e lentezza come tempo:lunghezza; costosità come euro:kg, ed economicità come kg:euro, e così via). Questa organizzazione cognitiva può anche sembrare ossessiva se ci si concentra solo sulla sua formalizzazione scritta, invece che sui significati che emergono attraverso una abitudine di discorso-azione: ma se perseguita con flessibilità e coerenza dà luogo, fin dall’inizio del ragionare sui numeri e a monte dell’operatività numerica strutturata, ad un’area di sviluppo prossimale che porta rapidamente ad una competente discriminazione fra rapporti omogenei e disomogenei, e ad una gestione problematica ma non caotica dei prodotti. (E’ importante ricordare, a questo proposito, che i “giochi” che strutturano aree di sviluppo prossimale ricche e flessibili – oppure no - molte volte sono già quasi “chiusi” al termine della scuola dell’infanzia. Beninteso, contro ogni malinteso “precocismo”).

- In altre parole. Il calcolare-per-puri-numeri, a cui quasi sempre si “riduce” l’aritmetica nella sua proiezione didattica, non appare affatto essere la base primaria (cfr il mitico “concetto di numero”) da cui prendere le mosse per le successive “applicazioni”; piuttosto, come risultato di un progressivo e controllato e sofisticato processo di astrazione, proprio in quanto tale aperto ad ogni particolarizzazione, virtualmente accessibile a tutti ma di fatto alla fine precluso ai più per carenze nella strategie di mediazione. Al tempo stesso tale padronanza totalmente “astratta” appare singolarmente vicina alla sua base più direttamente percettiva: quella nozione di “volte” che, a

partire dalla “centrata di attenzione”, innerva le differenti semantiche (cardinalità discreta, estensione continua, ordinalità ...), insieme alle loro configurazioni multidimensionali, attraverso l’unicità della sua “assoluta” adimensionalità (quattro volte x tre volte alla volta >>> 12 volte ..., ma allora $4 \times 3 = 12$ – finalmente!).

- Queste osservazioni prefigurano (e schematizzano superficialmente) un percorso di acquisizione della competenza numerica abbastanza diverso da quelli più comunemente praticati, e d’altra parte variamente verificato (e verificabile) nella sua efficacia. Non è questa la sede per entrare nei particolari: ma che l’impostazione e la strategia del percorso cognitivo intervenga pesantemente nel (futuro) controllo esplicito delle strutture di proporzionalità (e traslazione) lo si è già detto, e sembra del resto abbastanza evidente.

(6) PROBLEMI (PER ESEMPIO)

(Per non appesantire inutilmente il testo-base, la formulazione di tutti i problemi sarà resa disponibile attraverso link)

Il lavoro didattico può essere convenientemente articolato su tre livelli principali, che dovrebbero essere ben identificabili dai ragazzi stessi:

- a) *Attività a lungo termine*, articolate intorno alla costruzione di “grandi idee” o “grandi abilità”, che si sviluppano lentamente (variazionalmente) lungo percorsi che restano ben riconoscibili nella loro coerenza attraverso i mesi e gli anni.
- b) *Attività di medio termine*, in cui un aspetto emblematico (o un intreccio di aspetti), in genere riferito a “realtà” di ogni tipo, viene analizzato per un certo tempo, fino a ricondurlo entro i filoni di discorso più generali – o fino ad aprirne di nuovi.
- c) *Attività di breve termine*, o “diffuse”, in cui la competenza globalmente acquisita viene continuamente rievocata e stabilizzata confrontandola con situazioni ambientali o occasionali – anche attraverso la discussione collettiva, l’impostazione solo qualitativa di un’analisi plausibilmente adatta, la variazione-sul-tema, lo stesso “esercizio” in situazione diversa, e così via.

Ad attività del secondo tipo corrisponde la serie di “problemi intrecciati” che verranno brevemente riportati qui di seguito, nel loro riferirsi a tipiche dinamiche di “pensiero proporzionale e traslazionale”, e nel loro tipico svolgersi in classe attraverso fasi diverse: di discussione collettiva preliminare, di esecuzione individuale, di confronto di strategie e difficoltà, di elaborazione collettiva conclusiva, di nuove variazioni sul tema individuali (dal cambiamento di dati all’invenzione di situazioni/problema isomorfe), e così via.

Ciascun problema è studiato e predisposto, a livello di gruppo di insegnanti, in varie versioni che, centrate sullo stesso contesto ma con dati e richieste via via più stringenti, coprono in genere un intervallo di difficoltà concettuali e tecniche che va dalla scuola dell’infanzia alla scuola media (talvolta alla secondaria): permettendo, fra l’altro, una accurata valutazione (e autovalutazione) delle difficoltà e dei progressi dei singoli e delle classi, anche a distanza di tempo e di contesto. Come sarà evidente, una delle caratteristiche ricorrenti è la richiesta di dis-intrecciare esplicitamente, per poterle affrontare, situazioni in cui strutture additive e moltiplicative svolgono ciascuna uno o più ruoli; un’altra quella di permettere, quindi in pratica richiedere attraverso il confronto, l’uso di più strategie risolutive, e di conseguenza la progressiva costruzione di un’idea implicita ma potente di invarianza strutturale (analoga a quella di teorema-in-atto, alla Vergnaud) che costituisce uno dei cardini di una competenza matematica di base.

(6A) IL PROBLEMA DELLO ZUCCHERO

Nota: in corrispondenza a questa versione, tipicamente da secondo ciclo elementare e con dati numerici “semplici”, i ragazzi hanno competenza nell’uso delle comuni bilance da cucina, che comunque sono disponibili in classe in qualunque momento per una trascrizione concreta dei dati e delle scelte operative.

Il foglio presenta, in sequenza verticale figurata, cinque coppie di situazioni: i dati sono costituiti dalle letture delle bilance, riportate in grande. Alla fine (in basso) le domande.

Situazione I): bilancia A vuota, bilancia B vuota; ambedue segnano 0

Situazione II): bilancia A con bicchiere vuoto (150); bilancia B con brocca vuota (750)

Situazione III): bilancia A con bicchiere e acqua (300); bilancia B con brocca e acqua (1350)

Situazione IV): si mette zucchero, mescolando, sia nel bicchiere che nella brocca

Situazione V): bil A con bicch, acqua e zucch (320); bil B con brocca, acqua e zucch (1390)

E’ più dolce l’acqua del bicchiere o quella della brocca?

Se non sono ugualmente dolci, cosa bisogna fare per farcele diventare?

Commenti.

Ci sono, una volta eseguite coerentemente le necessarie sottrazioni, due scelte possibili: la proporzione omogenea ($\text{acquaA}/\text{acquaB}$, $\text{zucchA}/\text{zucchB}$) o quella disomogenea (confronto di $\text{zucch}/\text{acqua}$ che corrisponde alla “dolcezza”, o di $\text{acqua}/\text{zucch}$ che corrisponde alla “sciapezza”). I ragazzi, e molti adulti, tendono a preferire la prima: fra l’altro è proprio attraverso questa via che è più facile rendersi conto del “perché si deve fare una divisione”, attraverso un ipotetico riempimento di brocca con bicchieri tutti ugualmente dolcificati, etc. Il nodo cruciale, in questo come negli altri problemi, è proprio quello che la soluzione passa attraverso una situazione-modello da costruire ipoteticamente (anche molti adulti scrivono direttamente una proporzione “falsa” in cui trascrivono i dati, e poi non sanno uscirne). La cosa è ancora più evidente nella seconda domanda: ovviamente si può aggiungere zucchero nella brocca (soluzione preferita) o acqua nel bicchiere. Alcuni hanno l’idea brillante di mescolare brocca e bicchiere, senza aggiungere nulla, e poi ripartire il liquido risultante definito di “dolcezza intermedia”; qualcuno arriva a esplicitare l’operazione formalmente, quindi a calcolare la relativa dolcezza.

Il problema è stato molto studiato, sia in varianti di diverso livello (a scuola dell’infanzia si lavora misurando in tazzine e cucchiaini...), sia presentando lo stesso testo in diversi contesti e con diversi tempi (scuola secondaria, insegnanti elementari in servizio, insegnanti in formazione sia nel corso di formazione primaria, sia nella SSIS). E’ notevole che in ogni contesto si presentino sempre gli stessi errori tipici, in numero francamente eccedente ogni aspettativa apriori: sembra che, almeno a livello di “prima risposta”, il pensiero proporzionale raggiunga una saturazione a livelli decisamente immaturi e instabili, su cui la successiva educazione formale appare poco incisiva.

Il problema costituisce un tipico punto di partenza per richiedere la costruzione di problemi isomorfi, cioè con la stessa sequenza di operazioni in contesti diversi (i più immediati, e più intriganti in quanto coinvolgono una quantità di esperienza, sono quelli di movimento a velocità uniformi, e quelli di spesa a prezzi uniformi).

(6B) IL PROBLEMA DEL MAIALE

(6C) IL PROBLEMA DEI PANI

(6D) 4° PROBLEMA DEL COME SI PUO’ FARE

Descrivere sinteticamente (con parole, numeri, disegni, schemi di azione ...) due situazioni concrete in cui abbia senso dire: a) “prendine tre ogni quattro...”, b) “prendine quattro ogni tre...”.

Commentare sinteticamente somiglianze, diversità, difficoltà delle due situazioni.
Confrontare fra loro diverse interpretazioni date da diverse persone, e discutere possibili criteri di reciproca compatibilità fra interpretazioni, e criteri di raggruppamento secondo omogeneità e disomogeneità di struttura.

(6E) IL PROBLEMA DELLE BOTTI

(6F) IL PROBLEMA DEL BOTTIGLIONE

(6G) IL PROBLEMA DELLA VESPA

(6H) IL PROBLEMA DELLE VACANZE

Prima delle vacanze la maestra consegna ad ogni bambino un contenitore (un barattolo chiuso ...): per ognuno dei giorni che passano, il bambino dovrà mettere nel barattolo qualcosa di specifico (qualcuno una biglia, qualcuno un cucchiaino di zucchero, qualcuno tre grani di riso, qualcuno un ditale d'acqua, qualcuno due nocchie, ...).

Al rientro a scuola si contemplan i barattoli, si producono tutte le domande e tutti i dubbi che si riesce a trovare (ma con il barattolo dell'acqua come si fa a sapere quanti giorni sono passati? ma perché il barattolo dell'acqua e quello dello zucchero sembra che dicano cose diverse? come si fa a sapere se un bambino si è sbagliato, mettendo cose in più o in meno? ...); poi, con calma, si risponde a tutte ...

(7) SPAZIALITA' COME MEDIAZIONE COGNITIVA

La gestione di uno "spazio astratto" di variabili in reciproche relazioni vincolanti dovrebbe essere uno degli obiettivi culturali primari della scuola, a cui potrebbero/dovrebbero in particolare contribuire, in reciproca consonanza, competenze di matematica e competenze di fisica. Ma per arrivare a gestire con flessibilità e accortezza uno spazio astratto, un passaggio cognitivamente quasi obbligato è quello della metafora spaziale: vista, molto più che come rappresentazione occasionale, come vera e propria interfaccia fra relazioni fenomenologiche e relazioni formali (algebriche, vettoriali, differenziali, ... etc). E il calcolatore può aiutare molto in questo senso, se strategicamente usato.

Come è ovvio l'interfaccia spaziale è particolarmente semplice e significativa nel caso delle relazioni di proporzionalità, diretta o inversa che sia. C'è una gran quantità di lavoro, di progettazione e di sperimentazione, a cui è possibile fare riferimento: data la situazione vorrei limitarmi ad evocare appena di sfuggita un solo esempio, lasciando al lettore il divertimento di ... scovare le molteplici relazioni di proporzionalità diretta e inversa che sono intessute e intrecciate nelle attività a cui si accenna qui di seguito.

Terza elementare, parte centrale dell'anno.

Si gioca. Ad ogni bambino viene dato un certo numero di "soldi", estratto a caso fra zero e qualche decina; poi ci si muove a caso in uno spazio largo ma limitato: ad ogni incontro i due che si incontrano mettono in comune i rispettivi soldi, e se li dividono a metà. (C'è, ovviamente, un problema di frazioni che costituisce una delle ossature "formali" del gioco: ma ora non ci interessa, diciamo che le ripartizioni funzionano impiegando frazioni dell'unità grossolanamente arrotondate). Dopo un po' non ci sono più né molto ricchi né molto poveri; <dopo "abbastanza" tempo si diventerebbe tutti egualmente "abbienti">. (I ragazzi si divertono a escogitare strane strategie di

alleanza fra ricchi che “vanno insieme” per proteggersi dai più poveri ... ma alla lunga niente funziona). Per facilitare e rendere più rapidi i conteggi di ripartizione si comincia a rappresentare i soldi su carta a quadretti: con due barre verticali affiancate, si vede subito che <è inutile> sommare tutto e poi dividere per due: basta dividere in due la differenza, e togliere a uno e dare all’altro il risultato per diventare ricchi uguali; se poi ci sono frazioni di soldo, tanto vale usare carta millimetrata. (Pensare alla complessità che accompagnerebbe questo tipo di gestione in termini algebrici).

Si gioca di nuovo. Questa volta a muoversi e incontrarsi sono gruppi di uno, due, tre, quattro bambini: ogni bambino di un gruppo ha inizialmente gli stessi soldi, e le ripartizioni sono solidali e uniformi. Ora sul foglio quadrettato compaiono gruppi di barre verticali: per intendersi, se due bambini “da sei” incontrano quattro bambini “da tre”, l’interazione finisce con sei bambini “da quattro” (appena un po’ più complesso con le frazioni di soldo). Ancora più di prima la gestione spaziale rende accessibile e sicura, e quindi stabilizza cognitivamente, un’operazione che aposteriori non sarà troppo ostico vedere rappresentata in termini algebrici (validi cioè per qualunque incontro). Ma soprattutto mette in evidenza direttamente percettiva una fondamentale caratteristica strutturale del fenomeno: ad ogni incontro si lavora a somma costante; è inessenziale sapere le quantità assolute, basta lavorare sulla differenza – anzi, <sull’area della differenza>: due bambini per due soldi ciascuno persi fa quattro quadretti, proprio come quattro bambini per un soldo ciascuno guadagnato. E così via variando (<ma funziona proprio sempre!...>).

A fine anno si conclude il lavoro su “caldo e freddo”. Ci sono cinque grandi secchi con acqua a diverse temperature (circa 10°, 18°, 26°, 40°, 44°), e un termometro per ogni gruppo di tre bambini: uno fa, uno scrive, uno rappresenta sulla carta a quadretti. Il gioco consiste nel prendere un bicchiere di plastica di acqua da un secchio, uno da un altro (in diverse combinazioni), e mescolarli in un recipiente più grande leggendo i numeri del termometro subito prima e subito dopo il mescolamento. Sfilate di numeri ... : <che ci si fa?>. La chiave interpretativa viene dopo un po’ di lavoro da diversi “disegnatori”: <più o meno la temperatura alla fine è sempre a metà fra le due all’inizio ... non è vero che vince il caldo, né che vince il freddo, sempre i due messi insieme diventano caldi uguali, e caldi proprio a metà ...>. Qualcuno sbotta: <proprio come quando ci si incontrava, e si spartivano i soldi, e contava solo la differenza ...>. Già: <proprio come>.

E se si mettono due bicchieri di un tipo d’acqua, e tre di un’altra? <non è che anche loro si spartiranno l’area, cioè i quadretti, cioè i bicchieri moltiplicato la differenza dei gradi? (!?) ...>; <bisogna provare ...>; <maestra, anche se è suonata la campanella dobbiamo assolutamente fare delle altre prove, per vedere come va a finire...>.

Sembra terribilmente astratta la “compensazione” in cinque variabili, due differenze e due prodotti $M1 (T1-Tf) = M2 (Tf-T2)$ (cfr più sopra la nota storica). Eppure emerge “gentilmente” dai fatti, fatti di realtà e fatti di pensiero, e avrà modo di precisarsi e stabilizzarsi gradualmente, fino alle rappresentazioni “continue” (sempre prima spaziali e poi algebriche) ben controllate in prima e seconda media (cfr figura): un vero e proprio “festival” di proporzionalità dirette e inverse, e connesse traslazionali, a cominciare dalla linearità dei termometri e dalla loro taratura, fino alla comprensione che negli scambi <non si può vedere tutto il calore che uno ha, ma solo quello ceduto da uno che è più o meno uguale a quello acquistato dall’altro>. Anche se i sistemi interagenti sono tanti ... proprio come con i soldi ...

POSTFAZIONE (commento personale di P.Guidoni)

Come precisato fin dall’inizio il discorso è stato sviluppato per miniparagrafi, intesi come abbozzi di suggerimenti di riflessione: in altre parole, si tratta di un promemoria, che ha lo scopo di comunicare (e proporre alla discussione) l’articolazione di un lavoro più sistematico in corso di

precisazione e scrittura. E i sette paragrafi in cui l'esposizione è articolata corrispondono ad (almeno) altrettante "dimensioni" cruciali secondo cui si suggerisce di affrontare la riflessione, in vista di una trasmissione culturale efficace del pensiero proporzionale. (Altri aspetti verranno evocati nel corso di una trattazione più distesa).

Da un lato è evidente che un punto di vista appena un pò articolato (e correlato a vari aspetti cognitivi e culturali) su un problema appena un po' complesso come quello del pensiero proporzionale non può essere il risultato di un lavoro autoreferente: gli spunti di riflessione appena accennati si sono in effetti gradualmente coagulati e precisati attraverso una quasi trentennale interazione con molte persone, adulti e ragazzi, e una parallela frequentazione di molti testi scritti. Non c'è modo di rendere conto in modo adeguato di nessuno dei due tipi di interazione, né di "riconoscere" adeguatamente i molti parziali "percorsi paralleli", con persone e testi, che hanno lasciato tracce più profonde di altri.

Per parte mia queste riflessioni hanno cominciato a svilupparsi quando (nei primi anni '70) per la prima volta in Italia è stata avviata e documentata una ricerca sistematica e a lungo termine sulle dinamiche di comprensione e apprendimento in classe, centrata sul lavoro cooperativo e guidato fra i ragazzi, e sulla discussione prima durante e dopo il lavoro stesso. E forse non a caso il lavoro dei primi mesi (in un "doposcuola" di 4a e 5a elementare) ruotava intorno all'interferenza costruttiva fra comprensione fisica e comprensione matematica, in contesti di equilibrio di tavolette-balance varie, variamente appesantite dai due lati: con graduale emergenza della proporzionalità "inversa" (fra distanze e pesi) come criterio di equilibrio nella singola tavoletta, e della proporzionalità diretta (fra distanze e pesi) come criterio per trasferire situazioni di equilibrio fra tavolette fisicamente diverse; nonché della combinazione lineare per costruire "sovrapposizioni" di equilibri precedentemente verificati.

Capire è sempre complicato; tanto più se si tratta di fatti complessi come il capire.

Così le riflessioni si sono gradualmente strutturate, insieme alla ricerca: sia metodologicamente e dal punto di vista dei contenuti, in parallelo al seguire interi cicli elementari di una classe, sia attraverso alcune analisi storiche esemplari. E le "balance" hanno continuato ad analizzare "equilibri": equilibri continuo-discreto (chiodi e acqua...), discreto-discreto (fermagli e cannolicchi...), continuo-continuo (acqua e sabbia), in parallelo allo sviluppo della "comprensione del numero"; mentre altri contesti (a cominciare da quelli di merci-prezzi, spazi-tempi, e così via) entravano via via nel gioco cognitivo.

Negli ultimi anni, in preziosa collaborazione con gli Insegnanti del progetto <Capire si può>, ha preso forma un approccio sistematico al capire matematico elementare. Questo approccio trova ora le sue chiavi unificanti in una stretta integrazione, in una progressiva differenziazione e in un continuo "rispecchiamento" rispetto al capire fisico; nella sistematica analisi di "categorie" fondanti (individuo, proprietà, classe, sostanza, evento,...) che legano e intrecciano lo sviluppo di ogni comprensione "astratta", in particolare logica e matematica, alle strutture di percezione azione e lingua naturale; nella discriminazione esplicita e precoce fra sapere referenziale e sapere metaforico; nella sistematica "proiezione" spaziale delle categorie e delle strategie di pensiero, vista non solo come "rappresentazione" casuale o strumentale ma soprattutto come metastrategia vincente per indurre e stabilizzare la risonanza cognitiva; nella necessità e nelle caratteristiche "umane" di una mediazione culturale esplicita, finalizzata, strategica ... divertita ... da parte dell'insegnante; etc.

Gli spunti di riflessione brevemente evocati possono d'altra parte apparire ovvii, o addirittura ingenui, a un esperto; e di fatto a volte suscitano reazioni di sufficienza (o insofferenza) da parte di matematici (o fisici ...) di professione. D'altra parte, sperimentalmente tutti si sono rivelati di fatto cruciali nel successo della mediazione cognitiva sul campo: mentre spesso appaiono trascurati, o non messi sufficientemente in luce, anche in interventi che si riferiscono a contesti di ricerca didattica (solo per esempio: cfr (5) e (6)).

A questo proposito, forse tutti potremmo utilmente riflettere, e non solo riferendoci al pensiero proporzionale, su alcune sagge osservazioni di Freudenthal in un testo di esattamente venti anni fa

(7), che un capriccio del destino mi ha fatto trovare fra le mani proprio nei giorni in cui sistemavo queste note. Eccole:

<Tutto questo è talmente ovvio che come matematici (in generale, come esperti disciplinari - ndr) non ce ne preoccupiamo più: ma non possiamo aspettarci che tutto questo passi per pura diffusione dalla nostra in-consapevolezza a quella dei nostri allievi. ... Oggi i matematici hanno spesso una scarsa comprensione del calcolo dimensionale: ... e nessuno è consapevole del salto mentale che esiste fra rapporti interni e esterni (omogenei e disomogenei, nel linguaggio da me usato più sopra), nessuno si pone la domanda se tale salto non potrebbe essere troppo grande per chi apprende>

<La prematura e non necessaria traduzione di un rapporto in un problema numerico caratterizza il tradizionale prevalere dell'istruzione aritmetica su quella matematica. Gli oggetti mentali "relatively" e "ratio", per esempio, sono bloccati precocemente da associazioni numeriche: ... e si vede che i futuri insegnanti hanno gravi difficoltà nel creare modelli didattici che aprano ai loro allievi l'accesso agli oggetti mentali, ... ovviamente in conseguenza del loro stesso originario processo di apprendimento>

<E' probabile, come è tipico di molti processi di apprendimento, in particolare di quelli in matematica, che le sorgenti originarie del capire siano state fin dall'inizio oscurate o rese inaccessibili ("clogged"), mentre un successivo ritorno al capire è bloccato dai sopravvenuti processi di algoritmizzazione e automatizzazione – pure di per sé importanti. ... L'apprendimento deve essere guidato con fermezza in modo che possa tornare continuamente, durante il processo di algoritmizzazione e automatizzazione, ma anche dopo che questo si è concluso con successo, alle sorgenti del capire, ... avendo di mira una progressiva presa di coscienza, e capacità di verbalizzazione, di quanto era inizialmente inconscio e non verbalizzato. Quello che è sbagliato in molti metodi è puntare all'unicità di alcuni passi decisivi del processo di apprendimento, e alle conseguenze di tali passi, da raggiungere attraverso esercizi ripetuti: invece di aiutare a ripetere più volte ciascun passo, ...prima che qualcosa vada storto nella capacità di ripeterlo in modo autonomo>

(Forse è più realistico – umanamente più sano - imparare anche attraverso i molti tentativi quasi-guidati, e i correlati quasi-errori, piuttosto che soltanto per tentativi sostanzialmente casuali ed errori catastrofici. Forse la dinamica del capire umano, checché ne dica Popper, è sostenuta ben più dalle potenzialità di verifica di una molteplicità di punti di vista sempre possibili, che dalla drasticità della falsificazione di un punto di vista univocamente scelto e accanitamente perseguito. Forse. Ma questo è, comunque, un altro discorso).

Mi sembra comunque inevitabile tornare al problema di fondo di ogni progettazione didattica che coinvolga qualunque contenuto di matematica e/o fisica, su cui lo stesso Freudenthal è più volte ambiguo: come si può arrivare a gestire con efficacia l'interferenza ineliminabile, così pre-potente nel bene e nel male cognitivo potenzialmente indotto (risonanza o dissonanza), che sempre (a qualunque livello) si instaura fra sintassi e semantica (fra astrazione fisica e astrazione formale - o "riflettente", se si vogliono usare parole di Piaget)? Sulla malgestione di questo problema, spesso inutilmente rimosso e/o variamente strumentalizzato, la scuola italiana si sfracella, quotidianamente e con metodo; se ce ne fosse bisogno il PISA ce lo ricorda. Per uscire dall'impasse forse servono anche consapevolezze, quindi scelte, del tutto "nuove". (Almeno altrettanto nuove quanto diventa il mondo, "nuovo ogni giorno" come ci ricorda Eraclito, in cui i ragazzi nascono e ci crescono sotto gli occhi). Ma forse potrebbe aiutare anche guardarci un po' intorno (ci sono tanti che oggi riflettono e studiano sul conoscere), e un po' indietro (il problema è presente da sempre, alla base della cultura e della sua trasmissione, in particolare in area scientifico-matematica); forse basterebbe ritrovare stimoli di riflessione in quanto già tanti hanno pensato prima di noi,

confrontarsi con quello che pure tutti vedono e sanno, e hanno bisogno di sapere meglio...; accettare di provare a cambiare, esplorando e raccontandosi cosa succede.

Si può allora cominciare a scambiarsi a mò di augurio (come fra addetti a un comune lavoro di sociopoiesi applicata ...) alcuni “buoni consigli strategici” e alcune “buone domande”, che apparentemente restano più o meno invarianti nel tempo (le citazioni sono da precisare):

Eraclito:

... ma il sapiente sa che ogni sapere si costruisce a partire dal comune di tutti ...

Democrito:

... il discorso è l'ombra dell'azione ...

Aristotele:

... gli uomini, per natura, sono desiderosi di conoscere ... attraverso i gradi e i modi della sensazione, dell'esperienza, dell'arte specifica, del sapere per cause, della conoscenza prima ... (ma allora, chi non è più “motivato a conoscere” è stato ridotto a vivere contro natura?...)

Siccome, allora, la stessa natura si dice in due sensi, materia e forma, non possiamo indagarla senza materia, né secondo la sola materia. ... Ma se la natura è doppia, quale singola natura è oggetto d'indagine del matematico, o del fisico? Forse quella che è costituita da ambedue? O ciascuna delle due? ... Ma, allora, non è necessario ad ogni disciplina conoscere anche l'altra? O forse c'è una sola disciplina? ... E' necessario quindi capire bene in cosa un matematico differisca da uno scienziato della natura: infatti gli stessi corpi naturali incorporano e esibiscono tutti gli enti studiati dai matematici. Ma il matematico studia le proprietà di tali enti non in quanto appartenenti a entità naturali, e perciò le separa (da tali entità). Infatti si dà il caso che esse (proprietà o entità?) sono separabili attraverso il pensiero, e non fa nessuna differenza cosa veramente siano, e nessuna falsità può sorgere dal separarle ...: e i sostenitori delle idee in effetti separano anche gli enti fisici, che pure sono meno separabili di quelli matematici, spesso senza neanche accorgersene...

Galileo:

... ma io credo più tosto la natura aver fatto da prima le cose a modo suo: e poi fabbricato i discorsi de gli uomini, capaci di capire - però con fatica grande - alcuna parte de' suoi segreti... (ma allora è vero o no che <... il libro della natura è scritto in caratteri matematici ... e per chi non ne intende la lingua è come aggirarsi in un oscuro laberinto?> Forse a de-scriverlo in questo modo sono gli stessi uomini, come risultato sempre rinnovato del faticoso confronto fra i due “prodotti” fondamentali che la natura ha deciso a modo suo - le cose, e i pensieri sulle cose?. Forse.)

Heisenberg:

Il ruolo della matematica nei confronti della fisica è quello di fare emergere attraverso le correlazioni fenomenologiche osservate le invarianze formali su cui si basano e a cui si riducono tutte le leggi fisiche. Il ruolo della fisica nei confronti della matematica è quello di fare emergere correlazioni e potenziali strutture formali, da elaborare come tali ed eventualmente ri-applicare a contesti fisici per evidenziarne le invarianze. (OK con Aristotele?)

Wigner

<About the unreasonable effectiveness of Mathematics in structuring Physics' phenomena. (E se è “irragionevole” per lui, che effetto può fare ai nostri studenti?)

NOTE

- (1) - A.A. V.V.: *Il Programma OCSE-PISA: ITER* (Enciclopedia Italiana), V, 16-17, dicembre 02
- (2) Studio-ricerca collaborativo in corso a livello mondiale, 2003-2004
- (3) “lineale” è inteso nel senso di “unidimensionale”, rappresentabile su una linea
- (4) Forse è utile un chiarimento sul tipo di confronto analogico adottato, non ovvio ma sperimentato come didatticamente efficace.
- Da un lato. I due triangoli rettangoli possono essere guardati/visti come “sistemi” diversi: al cui interno valgono specifiche “relazioni di forma” fra i molti elementi individuabili (lati, mediane, sottoaree, angoli etc); fra i quali valgono (se il caso) specifiche “relazioni di similitudine”, che selezionano “elementi corrispondenti” all’interno delle due strutture di forma.
- Da un altro lato. Un intervallo spaziotemporale può individuare, all’interno di un dato movimento, un quasi-sistema: specificato, in linea di principio, da diversi elementi fisici e formali, oltre ai due intervalli corrispondenti di spaziototale e tempototale. (Il moto può essere variamente “vario”: nel caso più semplice possibile, quello di moto uniforme, gli elementi sono solo due e nel testo ci si riferisce a questo caso; se no bisognerebbe parlare di “velocità unifirmi equivalenti” – o di “velocità medie”, secondo i gusti). Lo stesso intervallo spaziotemporale può poi individuare un diverso sistema-movimento, associato a un diverso “attore” fisico; oppure un diverso sistema-movimento può essere definito da un diverso intervallo spaziotemporale, riferito allo stesso movimento fisico. Con la stessa strategia si possono definire “sistemi” ritagliandone la struttura all’interno dei più diversi contesti considerati.
- (5) R.Garuti, P.Boero: *A sequence of proportionality problems: an exploratory study*, Proceedings of PME-XVI, Durham 1992, pg 1-225
- (6) Pesci
- (7) H.Freudenthal: *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Reidel Publ 1983
-